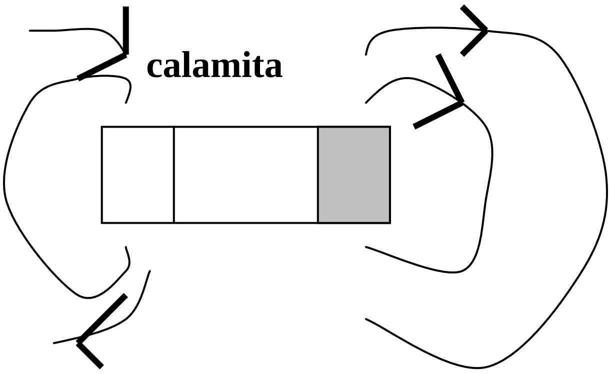
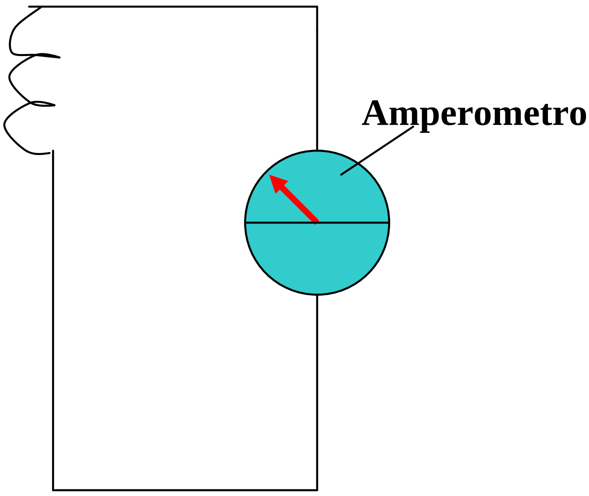
CAMPI ELETTRICI E MAGNETICI VARIABILI NEL TEMPO

In tecnica professionale 1 si è parlato dei campi elettrici e magnetici il cui valore resta costante nel tempo. In tecnica professionale 2 i fenomeni elettrici e magnetici NON STAZIONARI, in cui i valori delle diverse grandezze elettriche e magnetiche, ossia le correnti, le tensioni, i campi elettrici e magnetici, variano al variare del tempo. In questo caso non è possibile studiare separatamente il campo elettrico e magnetico, in quanto una variazione dell'uno provoca una variazione dell'altro, e viceversa.

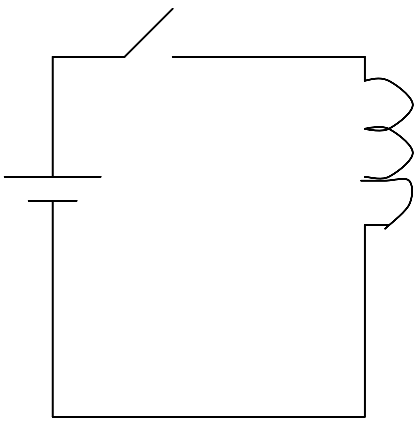
INDUZIONE ELETTROMAGNETICA: CORRENTI INDOTTE

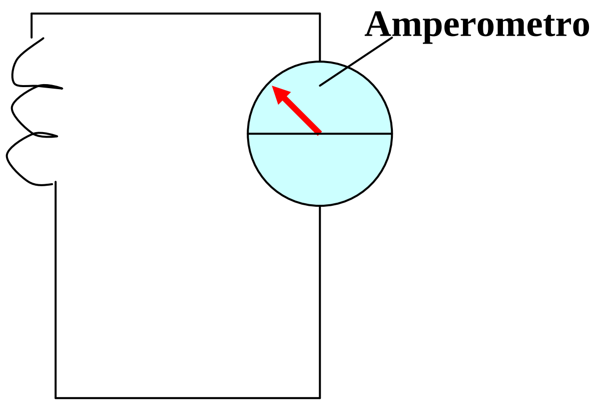
Vogliamo scoprire la natura dell'induzione elettromagnetica attraverso semplici esempi. Si consideri un solenoide i cui morsetti siano collegati con un AMPEROMETRO. In questo circuito non è applicato alcun generatore, come si può osservare dalla figura:





In questa situazione l'amperometro ha indice fermo sullo zero. Se prendiamo una calamita e l'avviciniamo al solenoide ci si accorge che l'amperometro segnala un passaggio di corrente, ossia l'indice si sposta dallo zero.
Inoltre ci si accorge che se si mantiene fissa la posizione della calamita l'indice dell'amperometro ritorna sullo zero, mentre se lo muoviamo avanti ed indietro l'indice si muove segnalando un passaggio di corrente.
Quest'esperienza ci mostra che è possibile generare una corrente elettrica in un qualsiasi circuito, nel quale non vi siano dei generatori.
Alle correnti ottenute in questo modo daremo il nome di CORRENTI INDOTTE, ed al fenomeno si dà il nome di INDUZIONE ELETTROMAGNETICA.
L'esperienza ha mostrato che è possibile ottenere, le correnti indotte, attraverso un altro modo, ossia nel modo che illustreremo. Si consideri il seguente schema:





Se chiudo il tasto, del circuito indicato con 1, nel circuito stesso si innescherà un passaggio di corrente, ed il solenoide genererà un campo magnetico H, (NI/l), allo stesso tempo si costaterà un passaggio di corrente nel circuito, indicato con 2; infatti in esso si è collocato un amperometro, che ci segnali i passaggi di corrente.
Questo passaggio di corrente, (cioè di corrente indotta), in 2, durerà un brevissimo tempo, ossia soltanto alcuni momenti dopo che si è chiuso il tasto del circuito 1.
Dopo di che, per tutto il tempo che in cui in 1 circola la corrente I, nel circuito 2 NON CIRCOLA alcuna corrente; infatti l'indice dell'amperometro è ritornato a zero e permane fermo su zero. Appare di nuovo la corrente nel circuito 2, per pochi istanti dopo cui si è aperto l'interruttore del circuito 1, cioè dopo che si interrompe la corrente nel circuito 1.
In questo esempio diremo che il CIRCUITO 1 è il CIRCUITO INDUCENTE, mentre il circuito 2 è il CIRCUITO INDOTTO.

D). **Qual è la causa che genera le correnti indotte?**

R). La causa di questa generazione può capirsi esaminando il modo in cui ORIGINIAMO le correnti indotte stesse.
Nel primo caso questa corrente indotta viene generata, quando si avvicina e si allontana un magnete o calamita dal circuito, oppure, nel secondo caso chiudendo od aprendo un interruttore di un circuito.
In altri termini il fenomeno si origina:
quando facciamo variare il flusso del campo magnetico, in cui è immerso il circuito.
Infatti, se si immaginasse di tracciare le linee di forza del campo magnetico, è ovvio che, nel primo caso, non facciamo altro che aumentare e diminuire le linee di forza che attraversano il circuito, con l'avvicinare o l'allontanare la calamita dal circuito stesso. In altri termini si dice che si aumenta e diminuisce il flusso concatenato con il solenoide del nostro circuito. Questo fatto induce nel circuito o nel solenoide una corrente, che sarà segnalata dall'amperometro. Nel caso in cui la calamita si lascia ferma, le linee di forza che si concatenano con il solenoide rimangono in numero costante, e pertanto nel circuito non circola alcuna corrente. Scompare la corrente indotta.

Nella seconda esperienza fino a quando l'interruttore è aperto, NON ESISTENDO ALCUN CAMPO MAGNETICO, non esiste neppure alcuna linea di forza che attraversa il circuito o il solenoide 2, ma nell'istante in cui si chiude l'interruttore del circuito 1, la corrente che passa nel circuito stesso produce un campo magnetico le cui linee di forza interessano immediatamente il solenoide del circuito 2, generando una corrente indotta nel circuito 2 stesso. Viceversa quando apriamo il circuito 1 le linee di forza del campo magnetico diminuiscono rapidamente, ossia le linee di forza concatenate col circuito 2, diminuiscono, producendo in 2 stesso una corrente indotta, con una brevissima durata. Ovviamente, nei momenti in cui la corrente circola in 1, mantenendo un numero di linee di forza concatenate costante, la corrente indotta in 2 si mantiene NULLA.

CONCLUSIONE	**in un circuito si genera una corrente indotta tutte le volte che, al variare del tempo varia il FLUSSO CONCATENATO al circuito.**

LEGGE DI FARADAY-HENRY.   LEGGE DI LENZ.

Adesso è necessario chiarirci: qual è l'intensità della corrente indotta? Qual è il suo verso?
Esistono due leggi che rispondono esattamente a queste domande, leggi che prendono il nome dai fisici che le hanno scoperte, rispettivamente le leggi si dicono LEGGE di FARADAY-HENRY, e LEGGE di LENZ.
Vediamo cosa esprime la prima legge. Supponiamo che il circuito introdotto precedentemente, più precisamente il circuito indotto, indicato con 2, anziché essere chiuso, presenti un'interruzione in un certo punto. Se ora facciamo variare il flusso di induzione magnetica concatenato col circuito, in esso è evidente che non può circolare corrente, essendo aperto o interrotto, tuttavia se utilizziamo un voltmetro e con i puntali tocchiamo gli estremi interrotti del circuito, esso misurerà una d.d.p. Tale d.d.p ai capi dei suddetti estremi permane fino a che si mantiene la variazione del flusso concatenato con il solenoide. Questa f.e.m, che indicheremo con **e** prende il nome di f.e.m INDOTTA, inoltre essa può avere valore tale da far scoccare una scintilla fra gli estremi stessi, se questi sono sufficientemente vicini.
Ritorniamo ora al caso in cui il circuito non sia interrotto, e nel quale possa perciò circolare una corrente indotta. Ovviamente anche per questo circuito vale la legge di OHM, e perciò la sua resistenza R, la f.e.m **e** e l'intensità della corrente sono legate dalla relazione: $i = \mathbf{e}/R$.

Dunque , a questo punto, per conoscere l'intensità della corrente indotta, bisogna conoscere il valore della f.e.m indotta. Essa verrà ricavata proprio dalla legge di FARADAY ed HENRY, che afferma che:
se nell'intervallo di tempo t2 - t1,(brevissimo), il flusso di induzione magnetico concatenato con un circuito, è variato da un valore iniziale $\phi 1$ ad un valore finale $\phi 2$, la f.e.m indotta è proporzionale al rapporto tra la variazione del flusso concatenato ed il tempo in cui tale variazione ha avuto luogo.

Scriveremo allora: $\mathbf{e = (\phi 1 - \phi 2) / (t2 - t1) = \Delta\phi/\Delta t.}$

Se i tempi sono misurati in secondi ed il flusso in Weber, la tensione indotta o f.e.m indotta si misura direttamente in VOLT. Dalla formula si osserva che a parità di variazione di flusso, la f.e.m indotta è tanto più grande quanto più è piccola la variazione di tempo, t2 – t1, in altri termini se per una certa variazione di flusso in un tempo di 2 secondi la f.e.m indotta e = 10 V, per la stessa variazione di flusso in un tempo pari ad 1 secondo la f.e.m diviene pari a 20 V, cioè raddoppia.

Questo significa che nelle esperienze precedenti, la calamita dovrà essere avvicinata ed allontanata con una grande rapidità.

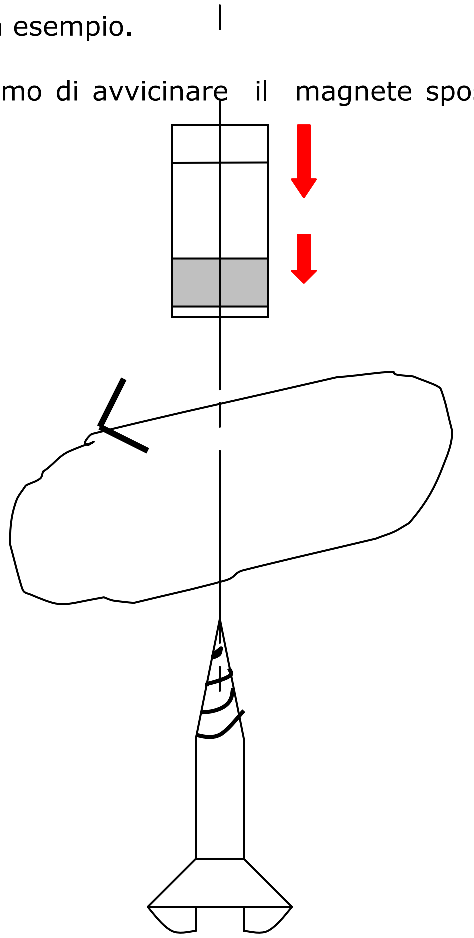
LEGGE DI LENZ

La legge di LENZ ci permette di rispondere alla domanda: IN QUALE VERSO CIRCOLA LA CORRENTE INDOTTA?

Essa dice che: **la corrente indotta ha un verso tale da opporsi, con le sue azioni magnetiche, alla causa che l'ha prodotta.**

Cercheremo di spiegare ciò attraverso un esempio.

Prendiamo una spira chiusa e supponiamo di avvicinare il magnete spostando il polo nord lungo l'asse della spira, vedi figura:



Nella spira si genera una corrente indotta, la variazione di flusso che genera questa corrente indotta è dovuta all'avvicinamento del polo nord, alla spira stessa. Quindi secondo la legge di LENZ la corrente indotta avrà un verso tale che il campo magnetico, da esso generato respinga il polo nord del magnete, e pertanto avrà il verso indicato. Ricordiamo la regola della vite, ossia lungo l'asse della spira disponiamo una vite, ed essa si dovrà avvitare secondo il verso indicato, ma come si vede nel nostro caso, essa procede nel senso di AVVITAMENTO. Questo ci sta a significare che, anche la corrente indotta procederà nella spira chiusa in senso ANTIORARIO.

<u>CONCLUSIONE IMPORTANTE</u>

La corrente indotta ha un verso tale creare un campo magnetico che si oppone alle variazioni del campo inducente, cioè si oppone alla causa che lo ha prodotto, (si oppone quindi alle variazioni del flusso concatenato).

E' meglio precisare a questo punto il concetto di flusso concatenato, anche se è un concetto molto intuitivo. In questo caso il flusso concatenato è la parte che risulta compresa all'interno della spira.

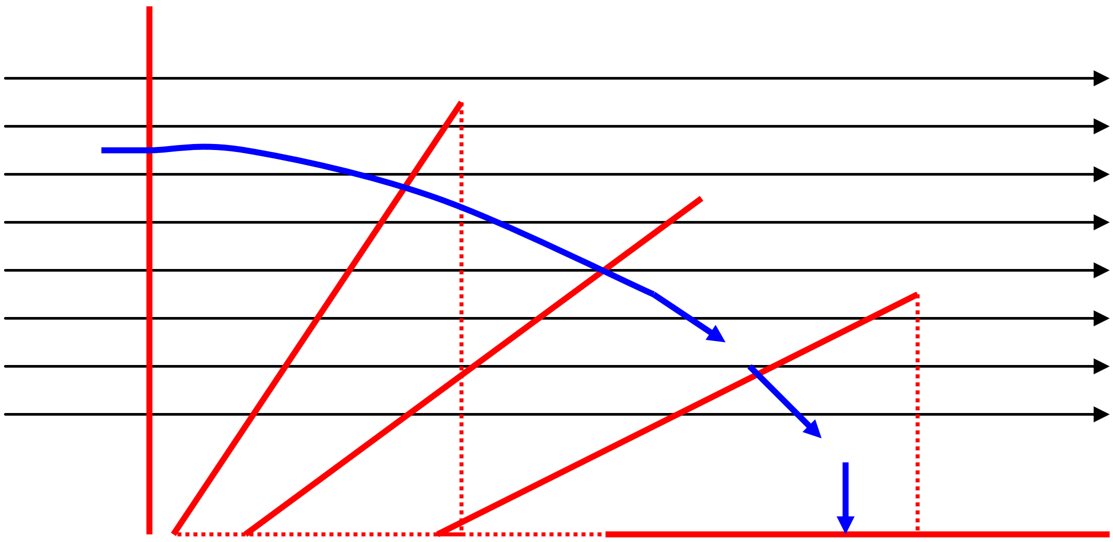
Nel caso di un solenoide caratterizzato da N spire, il flusso concatenato Øc è invece costituito dal flusso abbracciato da una spira moltiplicato per il numero N di spire che realizzano il solenoide dato. In definitiva risulterà: **Øc = NØ.**

ESEMPIO: Se un solenoide di 50 spire è immerso in un campo magnetico di induzione $B = 1,2$ Wb/m^2, e se la sezione del solenoide è di $10\ cm^2$, allora il flusso concatenato si calcola in questo modo:
flusso concatenato da una singola spira = ∅ = BS.

Dove $S = 10 \cdot 10^{-4} = 10^{-3}\ m^2$ e ciò implica che, **Ø = BS = $1,2 \cdot 10^{-3}$ = 0,0012 Wb.**
Pertanto il flusso concatenato dall'intero solenoide è dato come:

$\phi c = N\varnothing = 50 \cdot 0,0012 = 0,06$ Wb.

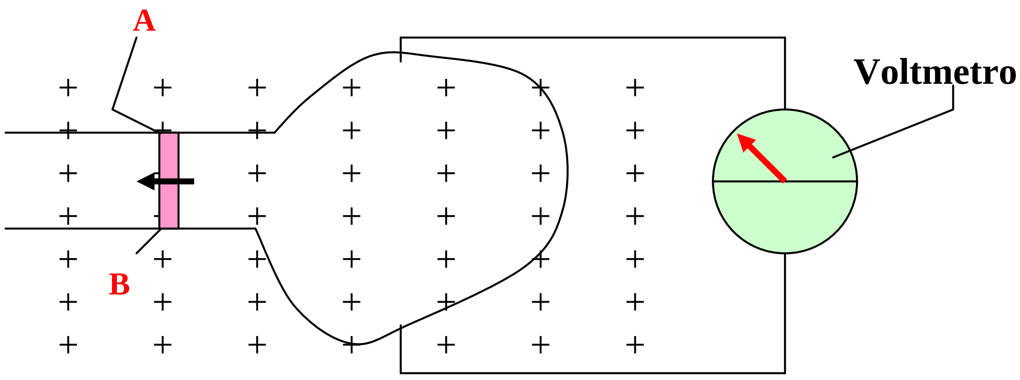
Questo si può ritenere un caso particolare poiché il flusso è parallelo alla direzione dell'asse del solenoide, mentre se il flusso fosse **obliquo**, rispetto all'asse stesso, allora il flusso abbracciato da ogni singola spira è **minore del precedente**, ossia
ϕc minore del caso precedente.
Pertanto il flusso è legato alla sua posizione nello spazio, rispetto al solenoide o circuito.
ESEMPI: **NB.** rappresenta la direzione dell'asse della spira;
rappresenta l'andamento del flusso magnetico.



Come si vede il flusso è progressivamente decrescente con il diminuire l'inclinazione, fino a divenire zero, quando l'inclinazione è NULLA.

F.E.M INDOTTA IN UN CONDUTTOREIN MOVIMENTO

Supponiamo di avere a disposizione un circuito come quello di figura:



dove una parte di esso, lunga l, (AB = l), ha possibilità di scorrere, cioè è come se si realizzasse un circuito mobile. Supponiamo che detto circuito sia immerso in un campo magnetico di induzione **B**, costante nel tempo, (ossia generato da una calamita). Si supponga che il flusso sia entrante nel foglio o nella lavagna, e lo si indichi con +.
Le linee do forza sono parallele fra loro e perpendicolari al foglio o alla lavagna come già si è detto.
In queste condizioni se nel circuito è inserito un VOLTMETRO, nel momento in cui spostiamo il tratto mobile, viene generata una f.e.m indotta, capace di generare una corrente indotta. **Ma perché si verifica questo ?**
Da quanto detto in precedenza il motivo è chiaro, perché spostando il tratto mobile l del circuito, noi non facciamo altro che variare il flusso concatenato al circuito stesso; infatti in tal modo non facciamo altro che aumentare o diminuire le linee di forza che lo attraversano, in funzione anche del tempo in cui eseguiamo questo movimento del tratto mobile.
Pertanto, avendo una variazione di flusso concatenato per la legge di FARADEY- NEUMANN avremo una f.e.m indotta espressa come:

$$\mathbf{e = \Delta\phi c \,/\, \Delta t.}$$

Inoltre, il flusso concatenato dipende dalla velocità con le quale si sposta il tratto mobile l del circuito, e quindi esprimendo il flusso in funzione dell'induzione **B** e della velocità di spostamento del tratto l, allora la f.e.m indotta assume la seguente forma: **e = B . v . l.**

ESEMPIO. Se il tratto l fosse di 10 cm = 0,1 m, e se esso si sposta alla velocità di 1 m/s, e se l'induzione fosse di 1,5 Wb/m², allora ai capi della barretta (A e B) si origina una f.e.m INDOTTA di valori pari a:

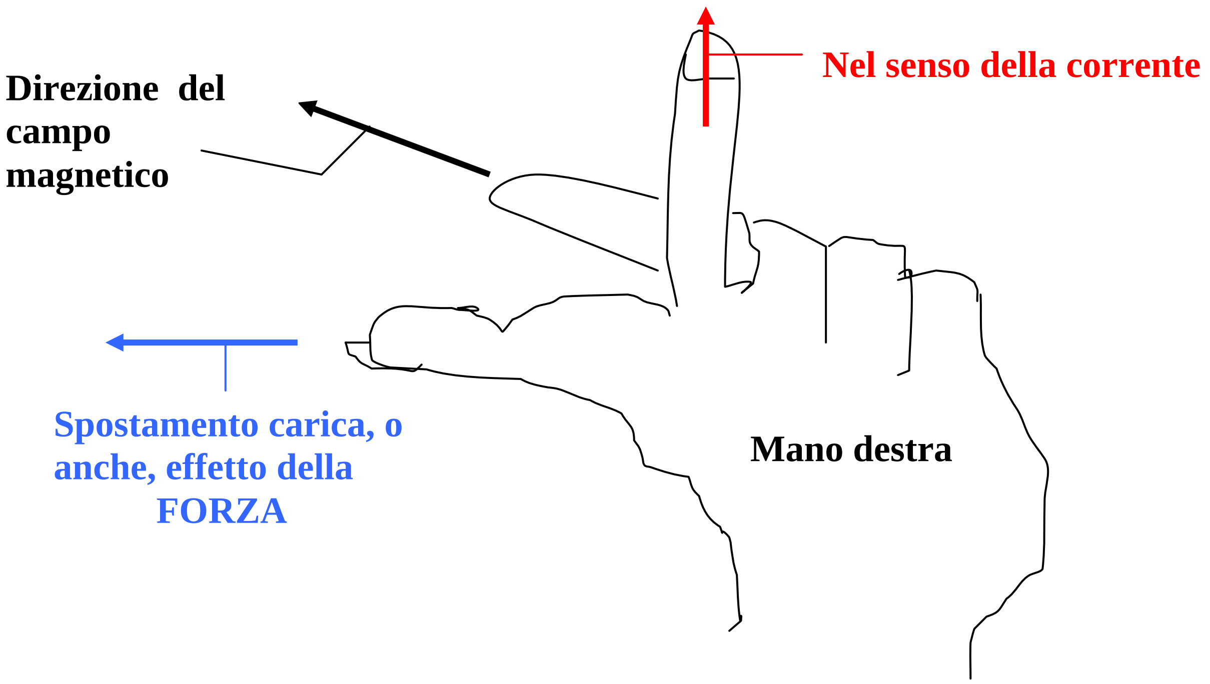
e = 1,5.1.(0,1) (Wb/m² . m/s . m = Wb/s = volt) = 0,15 volt.

LE AZIONI ELETTRODINAMICHE

Dopo aver trattato dei fenomeni di induzione, consideriamo ora, un altro fenomeno importante, connesso con esso.
Vogliamo allora esaminare l'insorgere di forze sui conduttori percorsi da corrente elettrica e immersi in campi magnetici. Tali forze vengono indicate col nome di **forze elettromagnetiche**. La più importante è la legge che porta il nome del suo scopritore, ossia la legge di Lorentz. Tale legge afferma che:
una carica elettrica unitaria, che si sposta con la velocità v in un campo di induzione B è sottoposta alla forza $F = v \cdot B$**, nell'ipotesi che la direzione del moto sia perpendicolare alla direzione del campo magnetico. Nel caso ciò sia diverso, ossia le due direzioni non sono perpendicolari, allora la forza dipende dal valore di tale angolo e diminuisce al diminuire di esso.**
In definitiva una carica elettrica, in moto ed immersa in un campo magnetico è soggetta ad una forza che ne influenza il suo spostamento.
A questo punto è possibile ammettere che, anche un conduttore percorso da una corrente elettrica, sia soggetto a detta forza, qualora esso sia immerso in un campo magnetico. (Si ricordi che una corrente elettrica non è altro che un flusso di particelle cariche). Ovviamente, per quanto detto poco sopra, l'entità di questa forza si ricava dalla legge di Lorentz. In questo caso essa può essere così scritta:

$$\mathbf{F = I\ B\ l}.$$

In altri termini si deduce che:
un conduttore di lunghezza l, percorso dalla corrente I ed immerso in un campo magnetico di induzione B, è sollecitato da una forza F, la cui intensità si ottiene dal prodotto delle 3 quantità introdotte. Si osservi che il verso di detta forza obbedisce alla cosiddetta <u>regola della mano destra</u>:



Questa regola dice che disposto l'indice nel senso della corrente **i**, il medio nella direzione del campo magnetico **m**, il pollice esprime la direzione ed il verso della forza agente sulla carica, (si noti che p = peso = pollice). Le tre dita devono essere aperte in modo tale da formare direzioni perpendicolari fra loro.

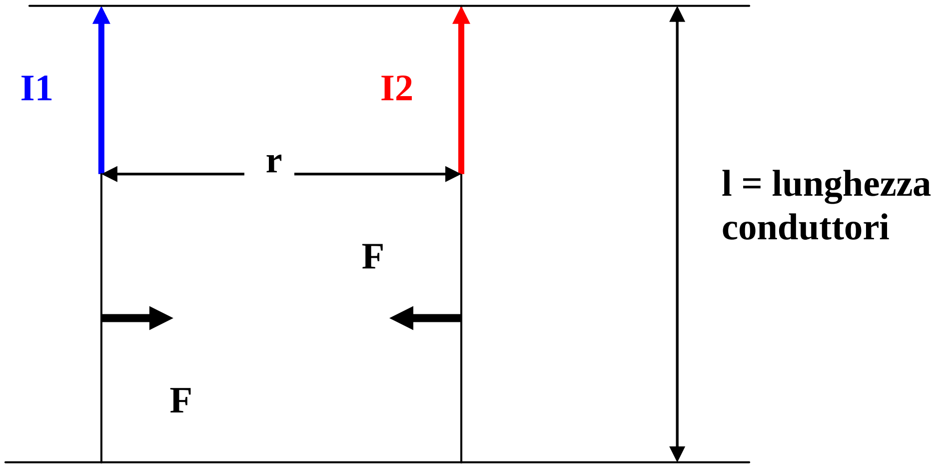
Possiamo procedere le nostre considerazioni tenendo presente, che anche le correnti, circolanti nei conduttori, generano nello spazio circostante un campo magnetico.
In effetti quando si è studiato la legge di Biot e Savart, abbiamo visto che le correnti circolanti in un conduttore generavano un campo magnetico, nella regione ad esso circostante. Tale campo magnetico dipendeva dall'intensità della corrente circolante nel conduttore, dalla distanza dal conduttore, in cui si valutava l'intensità del campo magnetico e dal mezzo in cui il conduttore stesso veniva immerso. In definitiva l'intensità dell'induzione **B** del campo

magnetico, alla distanza **r** dal conduttore percorso dalla corrente **I**, nell'ipotesi che il conduttore sia immerso in aria è dato da:

$$B = \mu 0\ I\ /\ 2\ \pi\ r.$$

<u>Ma, se i conduttori sono due</u> ? <u>e percorsi da due correnti distinte</u> ?

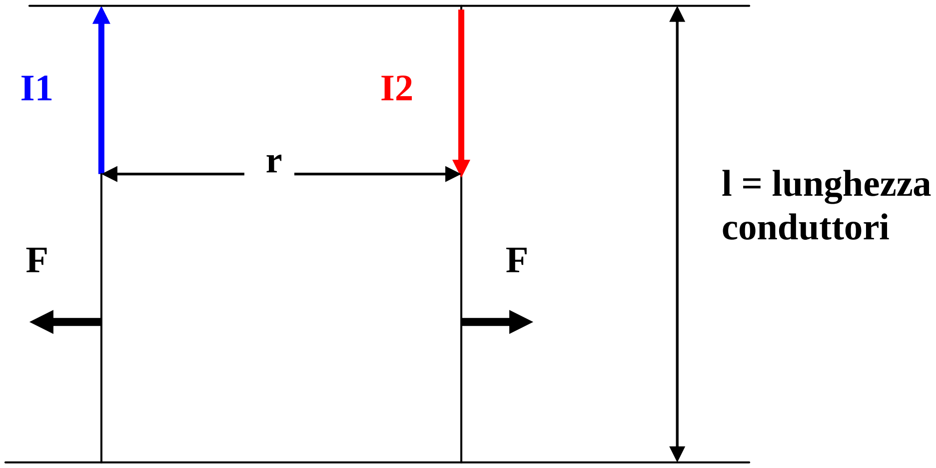
Supponiamo, allora di avere due conduttori, immersi nell'aria, a distanza r fra di loro ed essi siano percorsi rispettivamente dalla due correnti I1 ed I2. Inoltre, le due correnti siano **equiverse** fra loro:



Evidentemente ciascun conduttore è immerso nel campo magnetico generato dall'altro e viceversa. Se si ipotizza che la corrente I1 sia l'induttore, allora la corrente I2 è soggetta al campo magnetico dovuto alla corrente I1 e la forza a cui è soggetto F1 = B1 l I2 e viceversa, se si ipotizza la I2 come induttrice, allora in questo caso la corrente I1 è soggetta alla forza F2 = B2 l I1. Si è visto sperimentalmente che i due risultati sono identici, ossia F1 = F2. Infine, le due relazioni si possono conglobare in un'unica relazione, grazie alla legge di Biot e Savart ottenendo:

$$F = (\ \mu 0\ .\ I1\ .\ I2\ .\ l\ )/\ (\ 2\ \pi\ r\ ).$$

<u>Resta da capire quale siano le direzioni e versi delle due forze</u>.
Se applichiamo la regola della mano destra, ci si accorge che le due forze F hanno la stessa direzione, ma i versi opposti, ossia le due forze prodotte dalle due correnti, tendono ad avvicinare i due conduttori. In questo caso si dice che le due forze esplicano delle azioni elettrodinamiche di attrazione fra i due conduttori, (tendono ad avvicinarsi).
Si è constatato che se le due correnti I1 ed I2 sono **controverse**, le azioni elettrodinamiche divengono di repulsione, ossia i conduttori tendono a respingersi.



Si fa notare che se si vuole ottenere la forza, in Kg, con cui le due forze attirano o respingono le due correnti, è necessario dividere l'espressione F = I B l per 9,8, ossia
F (in Kg) = I B l / 9,8.

Vediamone un semplice esempio numerico:
due fili conduttori, alla distanza r = 0,1 m, siano percorsi da una corrente I = 1.000 A, entrambi. Vogliamo sapere quale forza li sollecita.
Consideriamo il campo magnetico prodotto dalla corrente del primo conduttore, con I1 = 1000 A:

$H1 = I1 / 2 \pi r = 1000 / 2 . 3{,}14 . 0{,}1 = 1591{,}55$ Asp / m;

con **$B1 = \mu 0\ H1 = 1{,}256 . 10^{-6} . 1591{,}55 = 0{,}002$ Wb / m²**.

Ora, per calcolare la forza i due conduttori si attirano o respingono, ricordiamo che:
F = I B l = I B1 l = (1000 . 0,002 . 0,1) / 9,8 = **0,02** Kg.

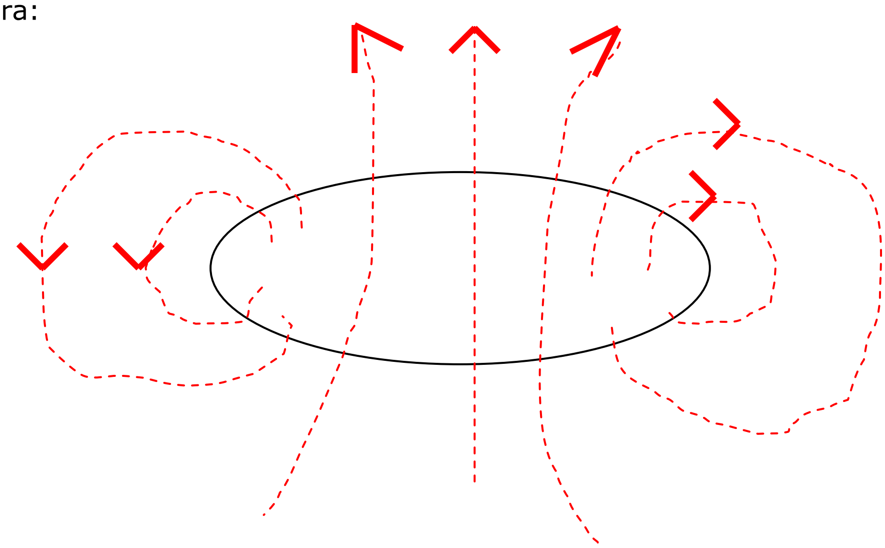
FENOMENI DI AUTOINDUZIONE

Si è visto dalle esperienze che, tutte le volte che variano le linee di forza, che attraversano un circuito, qualsiasi sia l'origine del CAMPO MAGNETICO e la causa della sua VARIAZIONE, all'interno del circuito si verifica una f.e.m INDOTTA, che si mantiene fini a quando dura la variazione del campo magnetico.

Questa f.e.m si origina dalle esperienze e dalle osservazioni di FARADAY-NEUMANN, con la precisione importantissima di LENZ; infatti EGLI affermò che detta f.e.m SI OPPONE ALLA CAUSA CHE L'HA PRODOTTA, OSSIA ALLA VARIAZIONE DEL FLUSSO.

Consideriamo una spira percorsa da una corrente elettrica, noi sappiamo che essa produce un campo magnetico, le cui linee di forza **si concatenano** al circuito stesso.

Concatenare significa che le linee di forza abbracciano il circuito, che le origina, a mò di anello, si veda la seguente figura:



L'intensità del campo magnetico è proporzionale all'intensità della corrente fluente nel circuito, e ciò implica che se si variasse l'intensità, nel contempo si varierebbe il flusso prodotto dal campo magnetico, ossia se ne varierebbe il numero delle linee di forza. Inoltre questa variazione produce, o induce una f.e.m.

Questo caso così particolare prende il nome di fenomeno di AUTOINDUZIONE.

Inoltre per la legge di LENZ, la f.e.m di autoinduzione deve avere verso tale da opporsi alla causa che l'ha prodotta, e questo implica che la corrente indotta dalla f.e.m indotta tenderà ad opporsi alla corrente originale circolante nel circuito:

in altri termini tende a rallentarne l'aumento, ossia se la corrente originale ha la tendenza ad aumentare, la corrente indotta ha la tendenza a ritardarne l'aumento, mentre se la corrente tende a diminuire a ritardarne il decrescimento.

Inoltre c'è da osservare che i fenomeni di autoinduzione o in genere di induzione, sono maggiormente accentuati se il circuito anziché essere formato da un'unica spira, è caratterizzato da molte spire, specialmente nel caso in cui le spire sono avvolte attorno ad un nucleo ferromagnetico. La ragione di ciò sta nel fatto che, un nucleo di ferro, avendo un'elevata permeabilità magnetica, assorbe a sé un numero elevato di linee di forza, e perciò costringe le spire avvolte su di esso a concatenare un numero maggiore di linee di forza. Quindi ad ogni variazione di queste, ciò comporta una f.e.m indotta di intensità superiore a quello che si avrebbe in un solenoide avvolto in aria. Abbiamo visto che il flusso autoconcatenato ad un circuito, risulta proporzionale alla corrente che circola nel circuito stesso, e quindi si può ammettere che:

$$\phi\ ac = L \cdot I$$

dove L è il fattore di proporzionalità ed è un fattore caratteristico di ogni circuito, e ad esso diamo il nome di COEFFICIENTE AUTOINDUZIONE.

Da ciò si ricava anche come si misura: $L = \phi/A =$ **flusso/corrente**

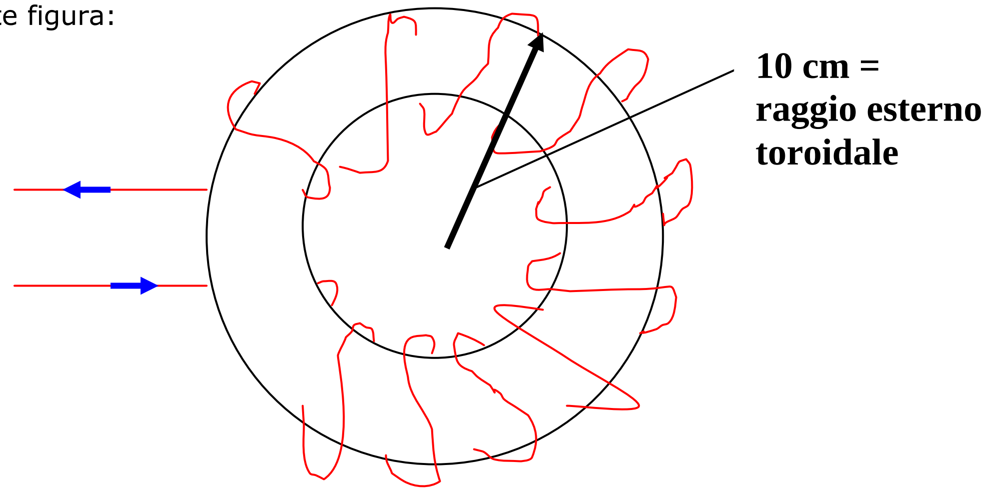
Wb/A = (V. sec) /A = Ω.sec = HENRY.

Dalla definizione data il coefficiente di autoinduzione di un circuito è uguale al valore di flusso concatenato, quando la corrente è uguale ad **un AMPERE;** infatti scriveremo: $L = \phi/1$ **$L = \phi$.**
Vediamo ora di dare un'espressione alla f.e.m di autoinduzione, tenendo conto che la f.e.m indotta è data da:

$$\mathbf{e = \Delta\phi/\Delta t = \Delta\phi ac/\Delta t = \Delta\,(LI)/\Delta t = L\,\Delta I/\Delta t}$$ come ci si doveva aspettare.

La formula ricavata **$e = L\,\Delta I/\Delta t$** è una formula molto importante e ci dice che la **f.e.m di autoinduzione,** (cioè dovuta al fatto che in un circuito, per una qualche causa la corrente varia o cambia valore), è uguale al prodotto del coefficiente di autoinduzione del circuito stesso, per la variazione di corrente, che si ha nel circuito stesso, diviso il tempo in cui avviene questa variazione.

Il coefficiente di autoinduzione è legato strettamente alla configurazione del circuito cui si riferisce, cioè dipende dalla sua configurazione o struttura geometrica, ed in alcuni semplici casi è possibile calcolarlo.
Altre volte non essendo possibile una determinazione precisa, si ricorre a formule complicate che forniscono un valore abbastanza preciso, ma non corretto o esatto completamente.
Comunque attraverso un esempio, vediamo come si calcola il coefficiente di autoinduzione L.
Si abbia un avvolgimento toroidale, costituito da un anello di sezione circolare. L'ipotesi è che la corrente che circola nel circuito vale 1 A.
Si consideri la seguente figura:



Per prima cosa determiniamo il valore del campo magnetico all'interno del solenoide, in questo caso consideriamo la formula: $Hl = NI$, con la l lunghezza media del circuito. **Lmed = l = $2\pi r$ = 20π cm = $0{,}2\pi$ m = 0,628 m.**
Da ciò allora si deduce che:

H = NI / l =(essendo I = 1 A **) = N/l = 500/0,628 = 796,18 Asp / m**.

Per semplificare facciamo l'ipotesi che il TORO sia costituito da un materiale ferromagnetico il cui valore di permeabilità corrisponda a quello dell'aria.
In base a ciò potremo scrivere: **$B = \mu 0 \,.\, H$** e da ciò,

$$\mathbf{B = 1{,}256.10^{-6}\ .\ (\,796{,}18\,) = 10^{-3}\ Wb / m^2.}$$

Il flusso autoconcatenato con le spire del toro è data dalla formula: $\phi ac = LI$, nelle nostre ipotesi è $\varnothing ac = N\varnothing$, ma $\varnothing = BS$ con $S = \pi$ cm² = **0,000314** m², e da ciò

$$\mathbf{L = \varnothing ac/\,I = NBS\,/\,I = 500\,.\,10^{-3}\,.\,0{,}0314 = 5\,.\,10^{2}\,.\,10^{-3}\,.\,314\,.\,10^{-4} = 1570\,.\,10^{-5} = L = 157\,.\,10^{-4} = 15{,}7\ mH.}$$

CALCOLO DEL COEFFICIENTE DI AUTOINDUZIONE CON METODOLOGIA GENERALE

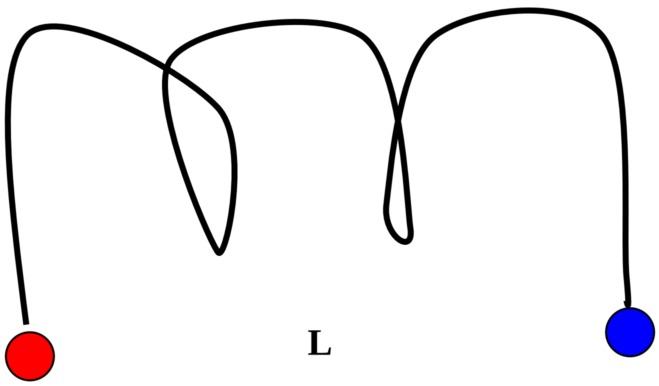
Vogliamo trovare un'espressione dell'induttanza partendo da considerazioni generali. Allo scopo si consideri un circuito formato da N spire avvolte su un certo circuito magnetico avente una riluttanza $\Re$. Dalla legge di HOPKINSON:
$\Re\phi = NI = Hl$ e da essa si desume anche il flusso generato dalla corrente nelle N spire, ossia $\phi = NI / \Re$.
Ammettendo che tutte le spire siano concatenate con uno stesso flusso ϕ, allora l'intero circuito sarà autoconcatenato con:
$\phi ac = N\phi = N (NI / \Re) = N^2I / \Re$, **ma visto che** $\phi ac = LI = N^2I / \Re$ **questo implica che,** $L = N^2 / \Re$.
A conferma di quanto detto in precedenza appare chiaro che il valore dell'induttanza, dipende solo dal numero delle spire, dalle dimensioni del circuito e dalla natura del circuito magnetico. La difficoltà è quella di calcolare di volta in volta il valore della riluttanza $\Re$ dei circuiti magnetici, che sono proposti.
Esaminiamo alcuni casi particolari:

A) **AVVOLGIMENTO TOROIDALE**.
Per esso è $\Re = l / \mu S$, e perciò si ricava che, $L = N^2/\Re = \mu S N^2 / l$.

B) **SOLENOIDE O AVVOLGIMENTO O BOBINA RETTILINEA**.
Anche in questo caso si può ritenere valida l'espressione, $L = \mu S N^2 / l$.

L'INDUTTANZA

Con INDUTTANZA si indica normalmente, un elemento di circuito avente un elevato coefficiente di autoinduzione. Il suo simbolo è il seguente:



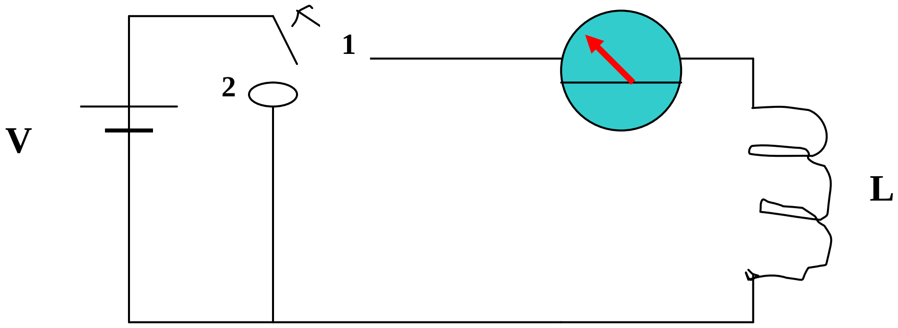
Perciò si parlerà di INDUTTANZA, nello stesso modo in cui si parla di resistenza.
In poche parole un circuito oltre a possedere una sua resistenza, possiede anche una sua induttanza, che dipende dalla geometria del circuito stesso.
Come si capisce l'induttanza ha la FUNZIONE di OPPORSI alle VARIAZIONI di CORRENTE, mentre la RESISTENZA si oppone al passaggio della corrente.
Si ripete per maggior comprensione, che l'induttanza **non si oppone alla corrente, ma solo e soltanto alle sue variazioni.**
Come è ovvio visto che l'induttanza si oppone alle variazioni di corrente, essa reagirà alla CORRENTE ALTERNATA. Infatti si è visto che:

$$E = L (\Delta I / \Delta t).$$

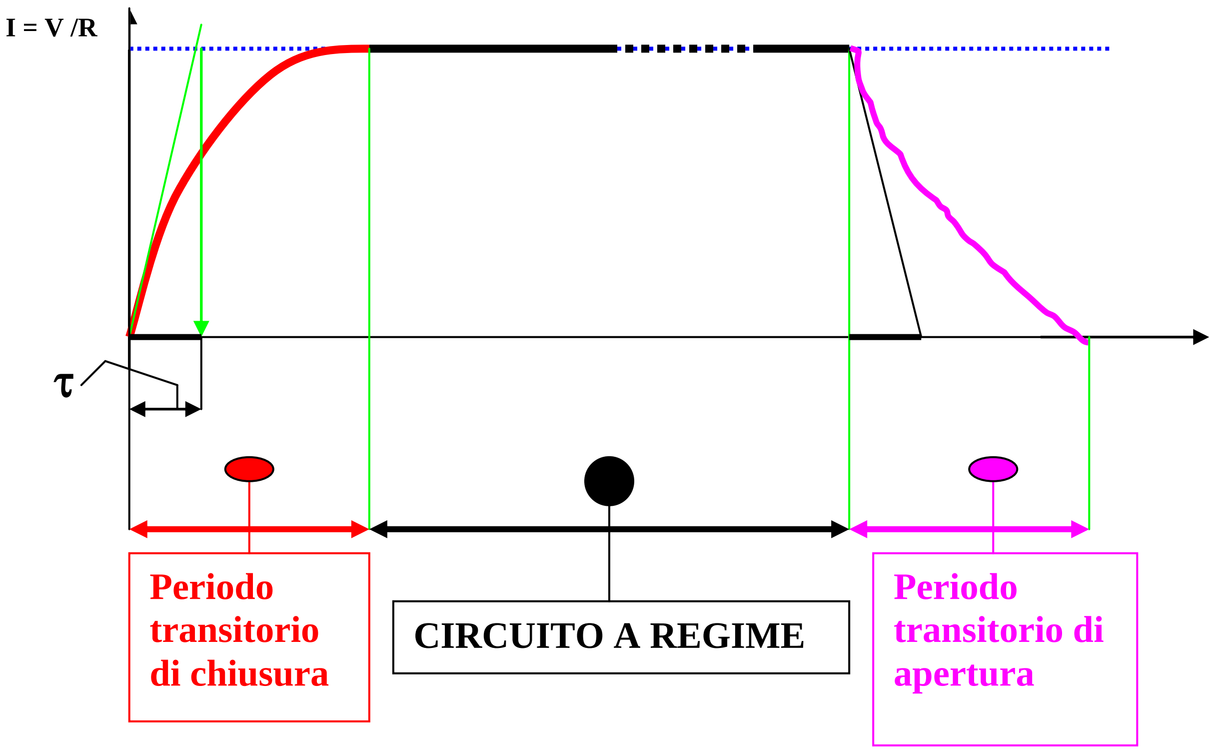
Nella pratica le induttanze hanno varie forme, ma tutte sono fondamentalmente degli avvolgimenti di filo, o avvolte in ARIA o avvolte su materiali FERROMAGNETICI.
L'INDUTTANZA come si è visto si misura in HENRY.

CIRCUITI INDUTTIVI IN REGIME VARIABILE

Finché in un circuito la corrente mantiene intensità costante; (regime stazionario), in esso NON SI MANIFESTA ALCUN FENOMENO DI AUTOINDUZIONE, ma ogni qualvolta ha luogo una variazione dell'intensità di corrente, (regime variabile), si genera una f.e.m di AUTOINDUZIONE, che in virtù della legge di LENZ agisce sempre nel circuito in modo tale opporsi alle variazioni di intensità di corrente.
Pertanto essa produce un effetto RITARDATORE sulle variazioni in atto; (si dice anche variazioni di regime o dello stato del circuito). In definitiva se in un circuito ha un'induttanza diversa da zero, le variazioni di corrente non possono avvenire ISTANTANEAMENTE, ma si sviluppano con una gradualità più o meno accentuata, a seconda del valore di L ed in rapporto con la resistenza R del circuito.
Infatti, l'esperienza mostra che chiudendo un circuito OHMICO – INDUTTIVO, si veda la figura:



La corrente NON ASSUME IMMEDIATAMENTE il valore di REGIME, ma si avvicina ad esso gradualmente, in modo esponenziale, raggiungendo tale valore in un certo lasso di tempo o periodo di tempo.



Lo stesso discorso può essere effettuato nella fase di apertura, infatti la corrente NON SI RIDUCE A ZERO IMMEDIATAMENTE, ma con una certa gradualità, e si annullerà completamente in certo lasso di tempo.

Il periodo nel quale la corrente non ha valore zero e non ha valore di regime si dice **FASE TRANSITORIA**, ed esso dipende dalle caratteristiche del circuito, ossia da L e da R. Comunque la fase transitoria ha una durata pari a **4-5 L/R.**
Il termine costante **L/R** si dice **COSTANTE di TEMPO** del circuito e si indica con:

$$\tau = L/R.$$

Pertanto un circuito induttivo la COSTANTE di TEMPO τ è tanto più grande quanto più grande è l'INDUTTANZA, oppure quanto è più piccola è la RESISTENZA.

ESEMPIO: **la costante di tempo di un solenoide in aria, con resistenza di 1 Ω e di induttanza pari a 10^{-3} H vale:**

$$\tau = L/R = 10^{-3}/1 = 10^{-3}\ \text{HENRY}/\Omega = \Omega\ .\cancel{\text{s}}\text{ec}/\ \Omega\cancel{=}\ \text{sec},$$

ossia vale 1 millisecondo. Per i solenoidi avvolti su materiali ferromagnetici l'induttanza può assumere valori elevati, anche dell'ordine delle decine di HENRY, mentre le resistenze in genere sono piccole. Se un solenoide ha L = 10 H, ed R = 0,1 Ω, allora si ottiene che τ = L/R = 10/0,1 = 100 secondi.

L'ENERGIA DI UN CIRCUITO INDUTTIVO

Come si capisce se si applica una tensione V costante ad un circuito composto da una resistenza elettrica R e da una induttanza L, la corrente dopo il periodo 4τ o 5τ assume il valore di regime I= V/R. Si capisce inoltre che, quando la corrente è continua, la presenza dell'induttanza NON MODIFICA per nulla l'andamento della corrente a regime, per cui il valore di regime è sempre dato dalla Legge di OHM.
Durante il periodo transitorio si ha uno scambio di energia fra il circuito ed il campo magnetico da esso creato, cioè all'atto dell'inserzione del generatore, l'energia da esso prodotta occorre anche per generare il campo magnetico:
una volta che questo campo è stato creato, esso si mantiene inalterato per tutto il tempo che la corrente mantiene il valore di regime, e quindi con valore costante.
Durante la situazione di regime; infatti l'energia prodotta dal generatore, va dissipata esclusivamente per effetto JOULE, attraverso la resistenza del circuito.
Si ha così in ogni fase, e quindi anche nella fase transitoria, una perfetta equivalenza fra ENERGIA PRODOTTA dal GENERATORE e l'ENERGIA ASSORBITA dal CIRCUITO.
Vediamone le varie situazioni di EQUILIBRIO.
<u>Nella fase transitoria di chiusura dell'interruttore:</u> 1
Energia prodotta dal generatore = Energia che va per costituire il campo magnetico + Energia che viene dissipata sulle resistenze per effetto JOULE.

<u>Nella fase di regime:</u> 2
Energia prodotta dal generatore = Energia che viene dissipata sulle resistenze per effetto JOULE.

<u>Nella fase finale o di apertura dell'interruttore:</u> 3
Energia immagazzinata, dall'induttanza, sotto forma di campo magnetico = Energia dissipata attraverso le resistenze del circuito, per effetto JOULE.

Da questi bilanci energetici si possono ricavare utili informazioni. Nel primo caso l'energia fornita dal generatore, va in parte per generare il campo magnetico, e parte viene dissipata per effetto Joule nella resistenza del circuito. C'è da osservare che inizialmente la corrente è nulla, essendo $P = RI^2$, per crescere lentamente fino al valore di REGIME. Anche l'energia che va per costituire il campo magnetico cresce da zero, nell'istante iniziale, essendo nullo il valore della corrente, fino al valore di regime. A questo punto l'energia immagazzinata nell'induttanza ha raggiunto il valore massimo che le compete, ossia il valore consentito dalla corrente massima di regime, da questo istante in poi tutta l'energia fornita dal generatore va

dissipata nelle resistenze del circuito. Nel secondo caso, cioè nella fase di regime, ossia quando il campo magnetico è ormai creato, non vi è più energia che deve essere trasformata in un campo magnetico, ma tutta l'energia GENERATA dal generatore viene dissipata per effetto Joule sulla resistenza totale del circuito. Nel terzo caso, staccando il generatore dal circuito, l'energia da esso prodotta è nulla. In questo momento allora il campo magnetico comincia a dissolversi o meglio a estinguersi, fornendo energia alla resistenza sotto forma di calore e dissipandosi come tale.
In definitiva, **l'energia assorbita dall'induttanza durante una qualsiasi variazione di regime elettrico del circuito, NON VIENE DISSIPATA, ma invece IMMAGAZZINATA, ed integralmente restituita durante la variazione di REGIME INVERSA.**

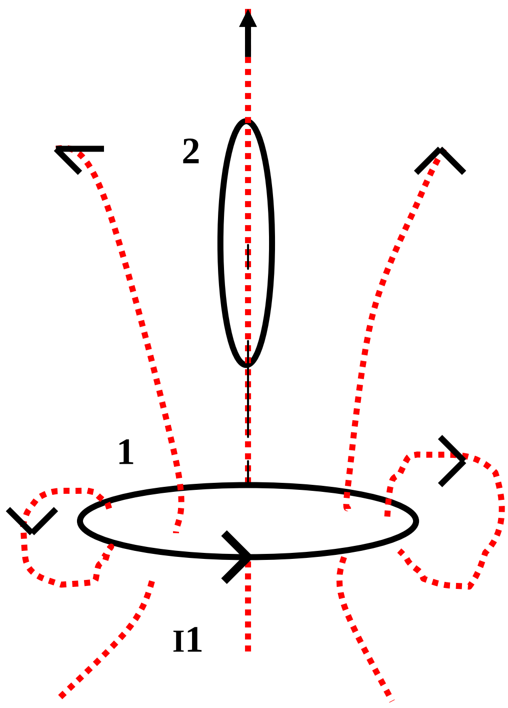
Pertanto se un circuito induttivo è sottoposto ad un regime di corrente periodica ed alternativa, oltre alla dissipazione della potenza in calore nella resistenza, si verifica anche uno scambio di energia fra circuito ed induttanza, che alla fine di ogni periodo risulta esattamente compensato. Infatti l'energia assorbita dall'induttanza in un primo tempo, viene integralmente sostituita al circuito in un secondo tempo.
Questo scambio energetico fra circuito ed induttanza è del tutto simile a quello che si verifica fra circuito e condensatore, dove in questo caso l'energia occorre per creare un campo elettrico, che viene immagazzinato dal condensatore stesso.

L'energia immagazzinata nel periodo transitorio dall'induttanza, è data dalla formula:
$El = 1/2\ LI^2$, cioè l'energia che è necessario cedere ad un'induttanza L per potervi stabilire una corrente I, è uguale al semiprodotto di L per il quadrato della corrente.

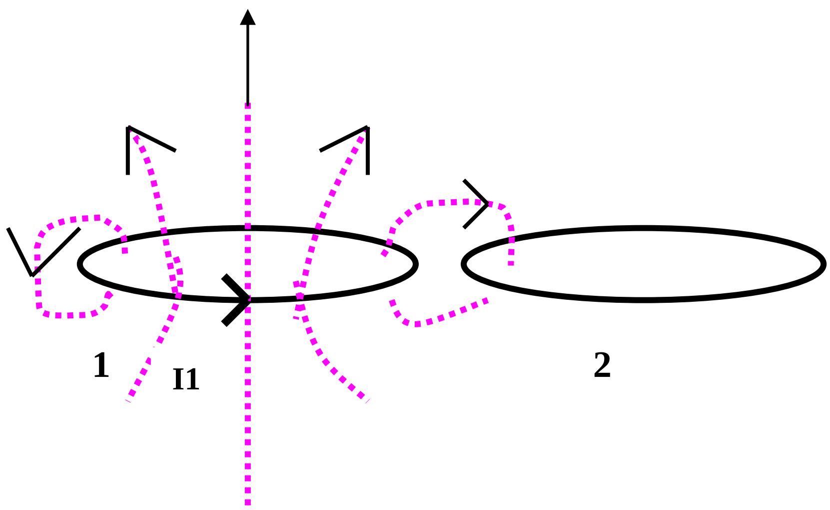
LA MUTUA INDUZIONE

Le linee di forza del campo magnetico prodotto dalla corrente che percorre un circuito, oltre a concatenare il circuito stesso, possono concatenare anche un secondo circuito, che si trovi nelle sue vicinanze.
In ogni caso una qualsiasi variazione della corrente del primario $I1$, così chiameremo il primo circuito, determinerà o indurrà una f.e.m sul secondo circuito, che diremo secondario. In modo perfettamente analogo se il circuito secondario è percorso da una corrente $I2$, una qualunque sua variazione determina una variazione del flusso concatenato col primario e ciò, produce una f.e.m indotta nel circuito primario.
I due circuiti pur non essendo elettricamente collegati fra loro possono esercitarsi, un'azione reciproca attraverso il campo magnetico, prodotto dalle rispettive correnti, poiché variando danno luogo al fenomeno della **MUTUA INDUZIONE**.
Fra due circuiti, tra i quali si esercita una mutua induzione, si dice che esiste un **ACCOPPIAMENTO INDUTTIVO.**
Diremo dunque che, **due circuiti sono accoppiati induttivamente, quando ciascuno di essi è concatenato con qualche linea di forza, del CAMPO MAGNETICO, prodotto dalla corrente dell'altro.**
Naturalmente l'accoppiamento può essere più o meno stretto a seconda della forma, della distanza, e della posizione reciproca dei due circuiti.

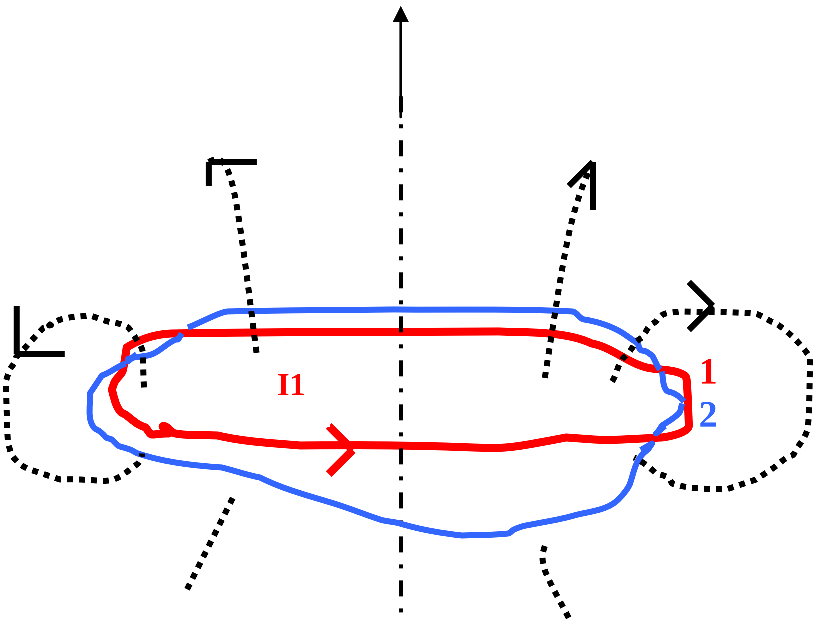
Si parla di ACCOPPIAMENTO NULLO, si veda la figura sotto riportata, quando la posizione reciproca tra la spira 1 e la spira 2, è tale che nessuna linea di forza del campo, prodotta dalla corrente I1, che percorre la spira 1, si concatena con la spira 2 e reciprocamente.



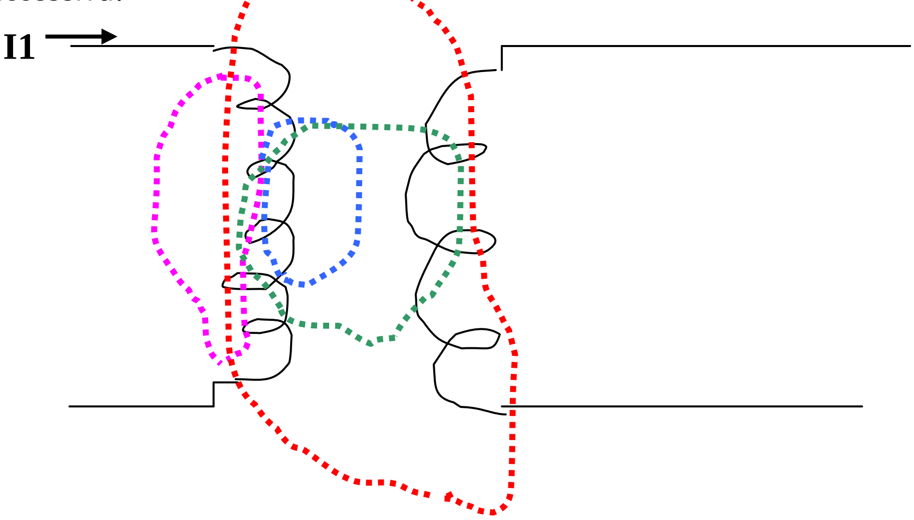
L'accoppiamento è PARZIALE se solo una parte delle linee di forza del campo prodotto dalla corrente I1, che percorre la spira 1 si concatena con la spira 2 e reciprocamente.



L'accoppiamento è, invece, TOTALE quando le due spire, pur essendo elettricamente isolate, tra loro aderiscono perfettamente l'una all'altra, e tutte le linee di forza del campo prodotto dalla corrente dell'una, sono praticamente concatenate anche con l'altro. Si veda la seguente figura:



Consideriamo ora un sistema formato da due circuiti ACCOPPIATI INDUTTIVAMENTE costituiti rispettivamente da due avvolgimenti, con n1 ed n2 spire, in cui il circuito di n1 spire è percorso dalla corrente I1.
Le linee di forza prodotta da questa corrente possono avere diversi andamenti, vedasi nella pagina successiva:



Si possono comunque distinguere in 4 tipi fondamentali:

1) **linee concatenate con tutte le spire dell'uno e dell'altro; linee di mutua induzione totalmente concatenate, (TRATTO in ROSSO);**

2) **linee concatenate con una parte delle spire dell'uno e dell'altro; linee di mutua induzione parzialmente concatenate, (TRATTO in VERDE);**

3) **linee concatenate con tutte le spire di un solo avvolgimento; linee disperse concatenate totalmente, (TRATTO colore FUCSIA);**

4) **linee concatenate con una parte di un solo avvolgimento, che si richiudono in aria; linee di flusso disperso totalmente concatenato, (TRATTO in BLU chiaro).**

Per semplicità, noi ammettiamo che NON esistano FLUSSI DISPERSI, ossia le nostre bobine o avvolgimenti siano costrette ad essere TOTALMENTE CONCATENATE col flusso prodotto dalle correnti, circolanti negli altri avvolgimenti. Quando lo spazio circostante gli avvolgimenti è occupato da un materiale a permeabilità COSTANTE, i flussi $\phi 12$, ossia il flusso creato dal circuito 1 e concatenato completamente col circuito 2, ed il flusso $\phi 21$, flusso prodotto dalla corrente circolante nel circuito 2 e concatenato col circuito 1, **sono proporzionali alle rispettive correnti che li producono, cioè**

$$\phi 12 = M \cdot I1,$$
$$\phi 21 = M \cdot I2.$$

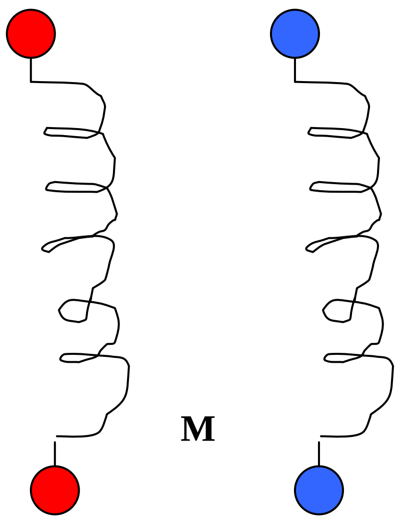
Il valore comune alle costanti di proporzionalità, cioè **M**, si dice **coefficiente di mutua induzione.**

Si osservi che: $M = \phi 12 / I1$, oppure $M = \phi 21 / I2$.

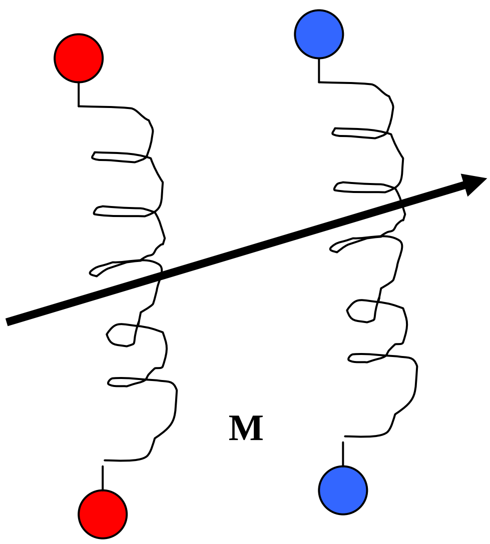
Esso è una grandezza caratteristica dei due circuiti, che dipende dalla loro conformazione, dalla loro posizione reciproca e dalla natura del mezzo circostante; inoltre esso ha le stesse dimensioni fisiche di L, ossia

M = Wb/I = Volt . sec./ I = Ω . sec. = Henry.

La mutua induttanza viene rappresentata nei modi seguenti:



Accoppiamento induttivo fisso



Accoppiamento induttivo variabile

A seconda della posizione reciproca dei due circuiti e del senso delle correnti che li percorrono, il flusso di mutua induzione che agisce su ognuno degli avvolgimenti può essere di senso concorde od opposto al flusso prodotto dalla propria corrente, cioè il flusso autoinduzione. Se vogliamo tenere conto di tale fenomeno è necessario attribuire un segno positivo o negativo al coefficiente di mutua induzione **M**.

Per convenzione attribuiremo il segno **positivo all'induttanza mutua M, quando nell'accoppiamento induttivo i flussi di mutua induzione,** nel tratto in cui agiscono sul circuito indotto, **sono concordi col flusso di autoinduzione di questo;** le attribuiremo il segno **negativo nel caso contrario.**

Se le correnti I1 e I2 che percorrono due circuiti accoppiati induttivamente subiscono delle variazioni nel tempo, nei due avvolgimenti, oltre alla f.e.m di autoinduzione, si generano delle f.e.m di **mutua induzione**, in quanto varia anche il flusso di induzione mutua.

Queste f.e.m sono perfettamente analoghe a quelle create dal flusso autoconcatenato, e pertanto ne hanno una forma già vista in precedenza. In definitiva scriveremo che:

$$e_{1M} = \Delta\phi 21 / t = ((\phi 21)'' - (\phi 21)') / (t'' - t')$$

$$e_{2M} = \Delta\phi 12 / t = ((\phi 12)'' - (\phi 12)') / (t'' - t')$$

Riferendosi alla prima formula, la f.e.m di mutua induzione che si stabilisce nel circuito 1, dipende dall'entità delle variazioni nel tempo del flusso creato dal circuito 2 e concatenato col circuito 1. Concettualmente il discorso è perfettamente analogo a quello fatto, precedentemente per la f.e.m di autoinduzione, solo che ora si tratta di flusso di induzione mutuo, cioè del flusso creato dalla corrente circolante in un circuito e che si concatena con un secondo circuito.
Le formule poco sopra scritte possono avere anche la forma seguente:

$$e_{1M} = M \ \Delta I2 / t = (M (I2)'' - (I2)') / (t'' - t')$$

$$e_{2M} = M \ \Delta I1 / t = (M (I1)'' - (I1)') / (t'' - t')$$

dove I"2 è l'intensità di corrente circolante nel circuito 2 al tempo t" e I'2 è invece l'intensità della stessa corrente che, ha circolato nel circuito stesso nell'istante t', anteriore all'istante t".
Si osserva che è possibile variare i flussi mutuamente concatenati, variando la geometria dei due circuiti, e mantenendo costanti le correnti in essi circolanti, in altri termini variamo la **M** variando la geometria dei circuiti.
Inoltre anche il coefficiente **M** di mutua induzione può venire determinato in modo analogo a quello effettuato, per determinare il coefficiente di autoinduzione.
Ad esempio la mutua induzione fra due circuiti, rispettivamente di N1 ed N2 spire, avvolti uniformemente su un toro di materiale a permeabilità costante, di raggio medio R e di sezione S è : $M = (\mu S / 2\pi R) . N1 . N2.$
D'altra parte si è visto che l'induttanza di un singolo avvolgimento, avvolto su un toroidale, è dato come: $L1 = (\mu S \, N1^2) / (2\pi R),$

$L2 = (\mu S \, N2^2) / (2\pi R).$

Se moltiplichiamo L1.L2 si ottiene che:

$L1 . L2 = (\mu S)^2 N1^2 N2^2 / (2 \pi R)^2 = M^2$ **, da cui sarà,**

$M = \sqrt{L1. L2.}$

Tale relazione, come vedremo meglio in seguito rappresenta un caso limite, corrispondente all'accoppiamento totale fra due circuiti.

FLUSSI DISPERSI

Il concetto di dispersione dei flussi, negli accoppiamenti induttivi, è di immediata comprensione, in altri termini il flusso relativo a ciascuno degli avvolgimenti è quella parte di flusso prodotto dall'uno che, indipendentemente dal percorso che segue, NON si CONCATENA con alcuna spira dell'altro, restando così inutilizzato per il **MUTUO ACCOPPIAMENTO**.
Consideriamo due bobine accoppiate induttivamente, costituite rispettivamente da n1 e da n2 spire, e percorse dalle correnti i1 ed i2, allora del flusso totale $\phi 1$ prodotto dalla corrente i1, del primo avvolgimento, **una parte si concatena con il secondo avvolgimento,** (flusso di mutua induzione), ed è quindi un flusso utile ai fini dell'accoppiamento induttivo, **una parte invece $\phi 1d$ non si concatena con la seconda ed il flusso è quello DISPERSO,** ossia un flusso non utile ai fini della MUTUA INDUZIONE. In definitiva risulta: $\phi 1 = \phi 12 + \phi 1d.$
Ovviamente risulterà pure che: $\phi 2 = \phi 21 + \phi 2d.$

ENERGIA DEI CIRCUITI MUTUAMENTE ACCOPPIATI

Anche per i circuiti mutuamente accoppiati si può naturalmente parlare di energia.
I discorsi sono analoghi a quelli effettuati a proposito dell'energia immagazzinata nelle INDUTTANZE.
Pertanto, nel caso di due circuiti accoppiati induttivamente, e percorsi dalle correnti i1 ed i2, i generatori che alimentano i due circuiti, per potere provocare una qualunque variazione nelle correnti, oltre alla potenza che viene dissipata in calore nelle resistenze, devono fornire, durante la variazione, anche la potenza assorbita dalle f.e.m di AUTOINDUZIONE e di MUTUA INDUZIONE. Si capisce, però, che al cessare della variazione, ossia una volta che la correnti si stabilizzano nei due circuiti, viene accumulata un'energia data dalla relazione seguente:
Em = $\frac{1}{2} L1\, I1^2 + \frac{1}{2} L2\, I2^2 + M\, I1\, I2$,
ossia l'energia magnetica complessivamente immagazzinata è uguale alla somma dell'energia magnetica di autoinduzione del primo circuito, dell'energia magnetica di autoinduzione del secondo circuito e dell'energia magnetica di induzione dipendente dall'accoppiamento mutuo.

ILTRASFORMATORE STATICO

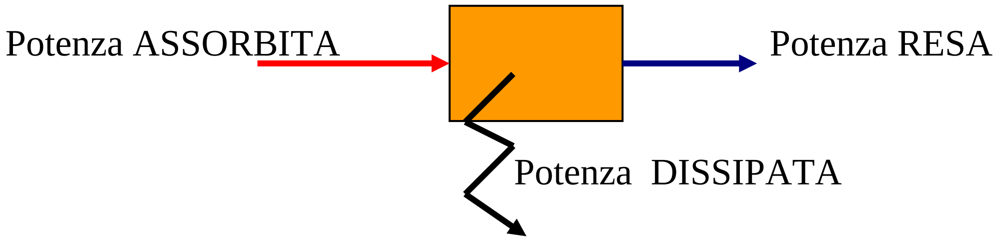
Si è visto che se su un conduttore applichiamo una d.d.p di valore V, allora in essa si origina una corrente I. La potenza sviluppata da questa corrente, è data: **P = V. I.**
Però, è possibile produrre la stessa potenza con intensità diverse della corrente, ossia:
$P = V\uparrow .\ I\downarrow$, ossia intensità di corrente molto bassa e tensione elevata;

oppure, $P = V\downarrow .\ I\uparrow$ ossia intensità di corrente molto alta e tensione molto bassa.

ESEMPIO: 200 W = 20.000 Volt . (0,01) Ampere;
200 W = 2 Volt . (100) Ampere.

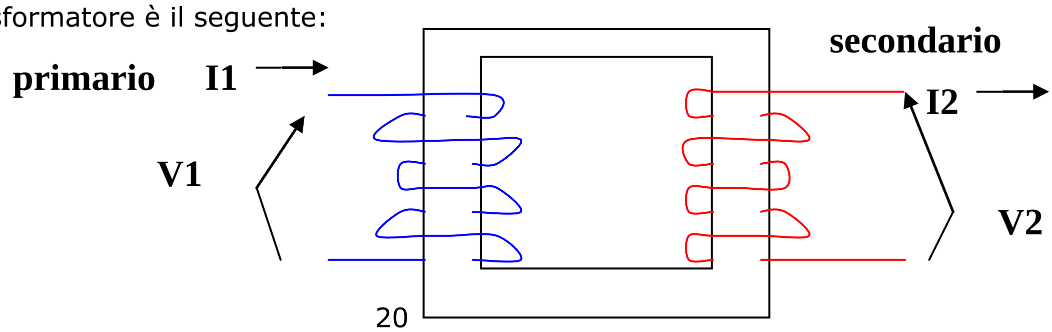
Molto spesso nella pratica si presenta proprio questo problema, di trasformare una corrente variabile in un'altra di intensità diversa. Questo problema viene risolto da una macchina elettrica statica, detta TRASFORMATORE.
Il trasformatore è una macchina estremamente generosa, cioè con alto RENDIMENTO, e senza organi in movimento.

Concetto di RENDIMENTO.



Da ciò si ricava: η = Potenza RESA / Potenza ASSORBITA =
= Potenza RESA / (Potenza RESA + Potenza DISSIPATA) =
= **1 – (Potenza dissipata/Potenza assorbita).**

Il trasformatore è essenzialmente costituito da un nucleo di ferro, di forma, generalmente rettangolare, in cui sono avvolti due circuiti, costituiti da un numero di spire diverse, ossia N1 ed N2. Normalmente il circuito 1 lo si chiama circuito PRIMARIO, mentre il circuito 2 lo si chiama circuito SECONDARIO.
Lo schema del trasformatore è il seguente:



Ora nell'ipotesi di collegare i due morsetti A e B del circuito PRIMARIO, con un generatore di tensione variabile, esso sarà percorso da una corrente, anch'essa variabile, e questo implica che, l'intensità del campo magnetico, generato da questa corrente alternata o comunque variabile, varia con una legge analoga a quella con cui varia la corrente che la genera.
Nell'ipotesi che, tutte le linee di forza del campo magnetico, siano interne al nucleo di ferro del trasformatore, (essendo un elemento ad alta permeabilità magnetica); in altri termini è come ammettere che NON vi sia flusso disperso, (ciò si dice ipotesi di KAPP), allora si capisce che per la legge di FARADAY – NEUMANN, sul circuito secondario si genera una f.e.m indotta ed alternata, con la stessa frequenza della corrente primaria: Scriveremo allora: $V1 = N1\phi$ e $V2 = N2\ \phi$, e perciò, se ne deduce che, $V1 / V2 = N1 / N2$. Dove il rapporto $N1 / N2$ si chiama **rapporto di trasformazione.**
In conclusione il trasformatore ci permette di trasformare una corrente alternata, di tensione V1, in una corrente alternata di tensione V2.
Se vogliamo che il trasformatore sia un ELEVATORE di TENSIONE, è necessario che il numero di spire secondarie sia maggiore di quelle primarie; mentre se vogliamo che il trasformatore sia un RIDUTTORE di TENSIONE, è necessario che il numero di spire primarie sia maggiore di quelle secondarie.

ESEMPI:
Siano N2 = 1.000 spire, N1 = 100 spire e la V1 = 200 Volt, da ciò allora si ricava, che $V1 / V2 = N1 / N2$ $V2 = N2\ V1 / N1 = (1000/100).V1 = 10\ V1 =$
$= V2 = 10 .(200)$ Volt = **2.000** Volt.
<u>Il trasformatore è allora un elevatore di tensione</u>.

Se invece fosse N1 = 10.000, N2 = 100 e se V1 = 12.000 Volt, risulterebbe che:
$V2 = N2 . V1 / N1 = 100 . (12.000)/10.000 =$ **120** Volt.
<u>Il trasformatore è in questo caso un riduttore di tensione</u>.

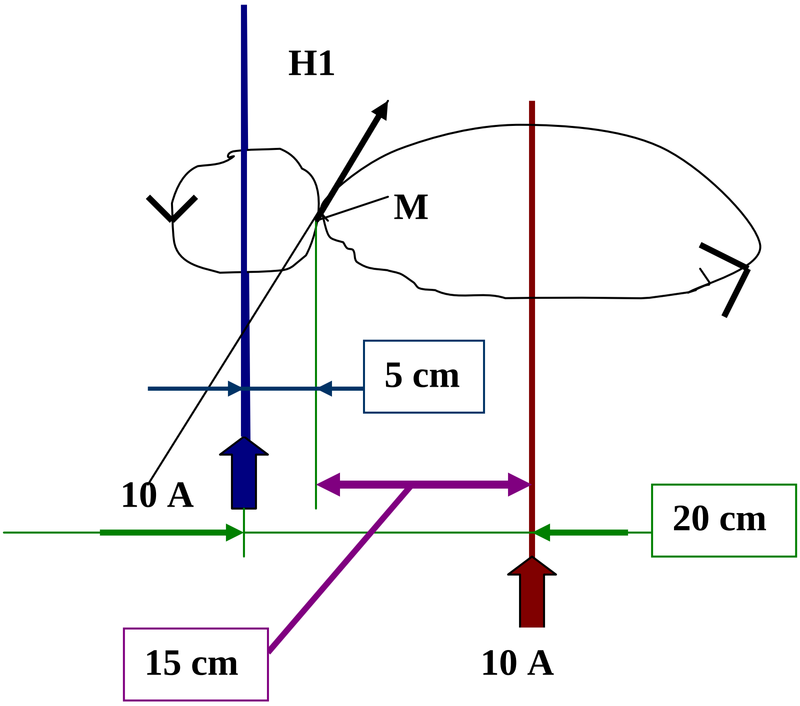
Si chiama RENDIMENTO del trasformatore, il rapporto tra la potenza utilizzata al secondario e la potenza sviluppata dalla corrente che passa a primario:

$$\eta = P2 / P1 = V2\ I2 / V1\ I1.$$

In genere il rendimento di un trasformatore è molto elevato dell'ordine dei 0,95 - 0,99.
Nell'ipotesi ideale di un trasformatore privo di perdite, **è possibile scrivere:**
$V2\ I2 / V1\ I1 = 1$, e da ciò deduco che $V1 / V2 = I1 / I2$, ma $V1 / V2 = N1 / N2$, e perciò posso scrivere: $N2 / N1 = I1 / I2$, ossia $I2 = (N1 / N2)\ I1$.

Dopo aver trattato nelle lezioni precedenti, i fenomeni di elettromagnetismo, cominciamo ad introdurre gli esercizi inerenti ai discorsi fatti.
E' necessario cercare di risolvere i vari esercizi, ma se le difficoltà sono notevoli è necessario ripassare la lezione corrispondente.

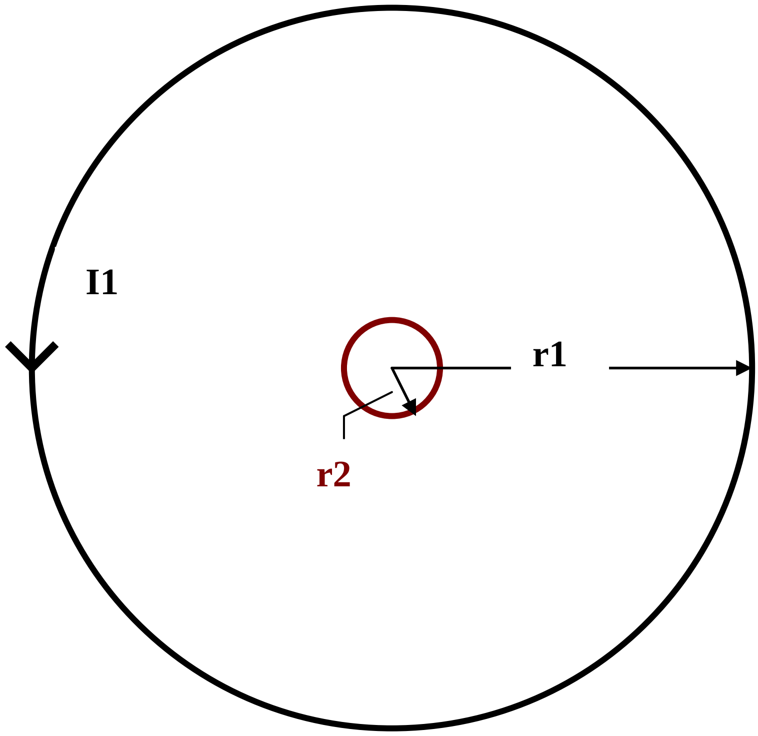
<u>ESERCIZIO 1</u> **Due fili rettilinei paralleli molto lunghi sono distanti 20 cm, e sono percorsi da una corrente di 10 A, nello stesso verso. Calcolare l'intensità del campo magnetico in un punto M posto tra i due fili, corrispondente ad una distanza di 5 cm, dal primo conduttore e da 15 cm, dall'altro.**



L'andamento del campo magnetico H1 è dato dalla regola del cavatappi, mentre si può pensare H2 come uscente dal foglio, di questi appunti.
IN QUESTO CASO si può pensare che il campo magnetico in **M** sia dato come differenza fra il campo magnetico H1 ed il campo magnetico H2, dove:
$H1 = I1 / 2 \pi r1 = 10 / 2 \pi (0,05) = 31,83$ Asp / m;
$H2 = I2 / 2 \pi r2 = 10 / 2 \pi (0,15) = 10,61$ Asp / m.
In definitiva il campo magnetico risultante M risulta uguale a:

$$H_M = H1 - H2 = (31,83 - 10,61) = 21,22. \text{ Asp / m}$$

ESERCIZIO 2 **Due spire circolari e concentriche poste nel vuoto hanno Rispettivamente raggi $r1 = 45$ cm, ed $r2 = 0,5$ cm. La spira maggiore è percorsa da una corrente costante di intensità I1, pari a 5,76 A. In 5 secondi questa corrente si riduce a zero. Calcolare la corrente indotta nella spira minore sapendo che la resistenza è di 0,12 Ω.**



In questo esercizio è necessario inizialmente calcolare il campo magnetico prodotto dalla corrente I1, circolante nella prima spira. Noi sappiamo che il campo magnetico da essa prodotta nel centro delle spire si ottiene come:

$$\mathbf{H1 = I1 / 2\,r1 = 5{,}76 / (2 \cdot 0{,}45) = 6{,}4\ Asp / m .}$$

Visto che la spira di raggio r2 è concentrica è possibile ammettere che tutto il flusso prodotto dalla corrente I1 attraversi la sezione, dovuta alla spira 2 stessa.
In definitiva si può pensare che:

$$\boldsymbol{\phi = B1\,S2 = \mu 0\,H1\,S2 = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 6{,}4 \cdot (\pi \cdot (0{,}005)^2) = 0{,}63 \cdot 10^{-9}\ Wb = 0{,}63\ nWb.}$$

Ma sappiamo anche che la forza elettromotrice indotta e è legata alla variazione del flusso nell'intervallo di tempo considerato, ossia nell'intervallo di 5 secondi in cui si annulla la corrente I1 circolante nella prima spira, (ovviamente i detto intervallo il flusso dal valore trovato si riduce a zero):

$$\mathbf{e = \Delta\phi / \Delta t = 0{,}63 \cdot 10^{-9} / 5 = 0{,}126\ nV.}$$

Visto che la resistenza della seconda spira vale 0,12 Ω, la corrente in essa indotta i2 vale:

$$\mathbf{i2 = e / R2 = 0{,}126 \cdot 10^{-9} / 0{,}12 = 1{,}05\ nA.}$$

ESERCIZIO 3 **Determinare il flusso magnetico concatenato con una spira circolare di raggio 2 cm., di filo sottilissimo, situata in aria, ed in corrispondenza della mezzeria di un solenoide rettilineo con essa coassiale, lungo 50 cm, costituito da 2000 spire circolari di raggio 3 cm, e percorse da una corrente di 5 A.**

Il campo magnetico prodotto dal solenoide si calcola nel modo seguente**:**

$$NI = Hl = B\,l / \mu 0, \text{ da cui}$$

$$B = \mu 0\ N\ I / l = (\ 1{,}256\ 10^{-6}\ )\ .\ (\ 2\ .\ 10^{3}\ .\ 5\ ) / 0{,}5 = 25{,}12\ mT.$$

L'area della sezione coassiale al solenoide vale:

$$S = \pi\, r^2 = \pi\ (\ 0{,}02\ )^2 = 0{,}00126\ m^2 = 1{,}26\ .\ 10^{-3}\ m^2$$

Il flusso ad essa concatenata è allora ottenuta come:

$$\phi = B\ S = 25{,}12\ .\ 10^{-3}\ .\ 1{,}26\ .\ 10^{-3} = 31{,}65\ .\ 10^{-6}\ Wb = 31{,}65\ \mu Wb.$$

ESERCIZIO 4 **Determinare il valore medio della f.e.m, indotta nella spira dell'esercizio precedente, quando nell'intervallo di tempo di 2 secondi la corrente del solenoide diminuisce da 5 a 2 A.**

Noi sappiamo che $e = \Delta\phi / \Delta t$, e dall'esercizio precedente sappiamo che:

$$\phi_5 = B_5\ S = 25{,}12\ .\ 10^{-3}\ .\ 1{,}26\ .\ 10^{-3} = 31{,}65\ .\ 10^{-6}\ Wb = 31{,}65\ nWb;$$

mentre sarà,

$$B_2 = \mu 0\ N\ I_2 / l = (\ 1{,}256\ 10^{-6}\ )\ .\ (\ 2\ .\ 10^{3}\ .\ 2\ ) / 0{,}5 = 10{,}05\ mT,$$

da cui si deduce che,

$$\phi_2 = B_2\ S = 10{,}05\ .\ 10^{-3}\ .\ 1{,}26\ .\ 10^{-3} = 31{,}65\ .\ 10^{-6}\ Wb = 12{,}66\ \mu Wb.$$

In base ai due flussi ricavati si ottiene che la forza elettromotrice indotta vale:

$$e = \Delta\phi / \Delta t = (\ 31{,}65 - 12{,}66\ ) / 2 = 9{,}495\ \mu V.$$

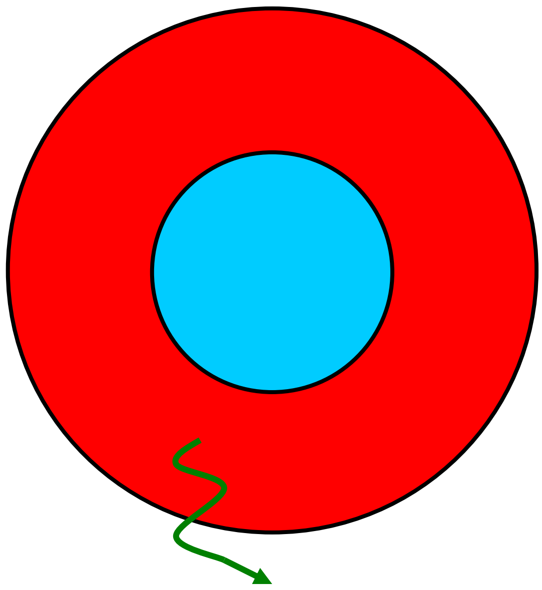
ESERCIZIO 5 **Una bobina di 200 spire di filo sottilissimo e chiusa su un circuito puramente ohmico di resistenza di 5.000 Ω, viene introdotta fra le espansioni polari di un magnete permanente in modo che nella sua posizione finale essa è concatenata con il flusso passante nel traferro del magnete. Quanto vale il flusso, se, per effetto dell'introduzione della bobina viene attraversata da una quantità di elettricità Q = 6,4 μ C ?**

In questo caso ne risulta che, $\Delta\phi = e\ \Delta t$, ma **e** è anche uguale a, $e = R\ i$.
Si capisce allora che: $\Delta\phi = e\ \Delta t = R\ i\ \Delta t$, ma Noi sappiamo anche che, $i = Q / \Delta t$, da cui ne sale che, $i\ \Delta t = Q$ e perciò

$$\Delta\phi = e\ \Delta t = R\ i\ \Delta t = R\ Q = 5\ .\ 10^{3}\ .\ 6{,}4\ .\ 10^{-6} = 32\ \mu\ Wb.$$

Ne può seguire un'importante osservazione, ossia si è visto che: $\Delta\phi / R = Q$, in poche parole la quantità di elettricità o di carica in gioco in un circuito elettrico dipende dalle variazioni di flusso e dalla resistenza del circuito stesso, (ciò significa che la carica è completamente indipendente dal tempo in cui si verifica la variazione di flusso.

ESERCIZIO 6 **Determinare la riluttanza di un anello torico di porcellana, La cui permeabilità si può assumere uguale a quella dell'aria. Il raggio medio dell'anello, comunque, vale 20 cm, e la sua sezione è circolare, con raggio di 5 cm.**



La riluttanza ℜ di un circuito magnetico, in funzione delle caratteristiche geometriche si esprime nel modo seguente: **ℜ = l / μ S**; dove **l** rappresenta il percorso medio interno al toroidale, μ in questo caso corrisponde a μ**0**, ossia alla permeabilità magnetica dell'aria ed S è la sezione del toroidale. In questo caso ho: $\mathbf{r_{med} = 20}$ **cm = 0,2 m**, da cui

$\mathbf{l = 2\,\pi\, r_{med} = 2\ .\ 0{,}2\ .\ 3{,}14 = 1{,}257\ m}$;

$\mathbf{S = \pi\, r^2 = 3{,}14\ .(\ 0{,}05\ )^2 = 0{,}00785\ m^2}$.

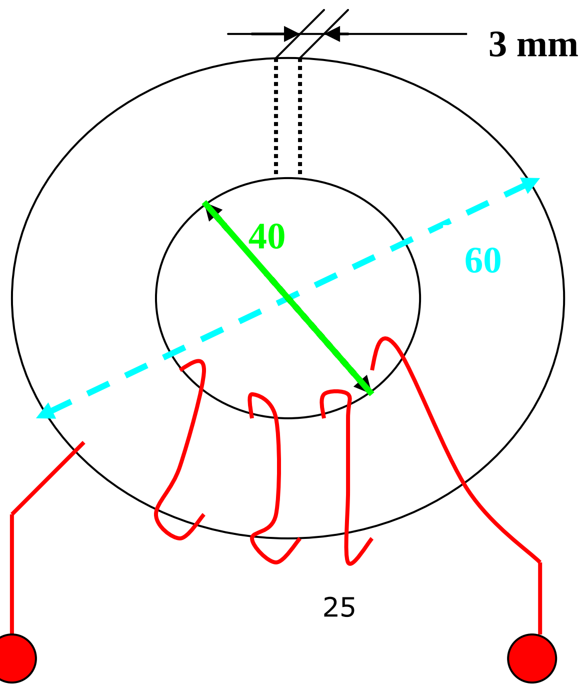
Da ciò è :

$\mathbf{\Re = l / \mu\, S = 1{,}257 / (\ 1{,}256\ .\ 10^{-6}\ .\ 0{,}00785\ ) =}$

$\mathbf{\Re = 0{,}1275\ 10^{9}\ Asp / Wb = 0{,}1275\ GAsp / Wb.}$

<u>ESERCIZIO 7</u> **Un anello di ferro fucinato, avente una <u>sezione quadrata</u> con lato di 10 cm, ha il diametro interno di 40 cm e quello esterno di 60 cm. L'anello porta un avvolgimento magnetizzante di 500 spire.**
Determinare la corrente necessaria per produrre nell'anello un flusso di 0,015 Wb. Determinare, inoltre di quanto si deve aumentare ancora la corrente per mantenere ancora lo stesso flusso dopo avere praticato nell'anello un traferro di spessore pari a 3 mm. La tabella di magnetizzazione del ferro fucinato è qui sotto riportata:

B (Wb/m^2)	**0,2**	**0,4**	**0,6**	**0,8**	**1**	**1,2**	**1,3**	**1,4**	**1,5**	**1,6**	**1,7**	**1,8**	**1,9**	**2**
H (Asp/cm)	**0,9**	**1,2**	**1,7**	**2,7**	**4**	**6,2**	**8,5**	**12**	**20**	**35**	**60**	**100**	**160**	**250**



L'anello privo del traferro costituisce un circuito magnetico omogeneo, con sezione quadrata e costante, il cui valore è dato da: $\mathbf{S = l^2 = 10^2 = 100\ cm^2 = 0{,}01\ m^2}$.
L'induzione si ricava dalla relazione: $\boldsymbol{\phi = B\ S}$, ma il flusso è noto, perciò è possibile risalire al valore dell'induzione, necessaria a determinare tale flusso:

$$\mathbf{B = \phi / S = 0{,}015 / 0{,}01 = 1{,}5\ Wb / m^2.}$$

Sulla tabella di magnetizzazione si ricava le **Amperspire / cm** necessarie a determinare tale induzione: **H = 20 Asp / cm = 2000 Asp / m**.

A questo punto è possibile ricavare la Forza magnetomotrice necessaria: **F. m. m = H l**, con l = lunghezza media del percorso interno al toroidale = π (Diam esterno + Diam interno) / 2 = π (100) / 2 = 50 . 3,14 = 157 cm = 1,57 m, da cui la **F. m. m** vale: **F. m. m** = **2000 . 1,57 = 3140 Asp.** Visto che la **F. m. m** equivale anche ad **NI**, la corrente **I** necessaria per determinare tale **F. m. m** vale:

I = F. m. m / N = 3140 / 500 = 6,28 A.

Se nell'anello viene praticato un traferro di 3mm = 0,003 m, allora il circuito magnetico risulta decomposto in due tronchi, un tronco costituito da ferro fucinato ed un di aria. I due tronchi risultano, inoltre, in serie l'uno rispetto all'altro.
In questo caso il tronco di ferro ha una lunghezza pari a:

L = l – spessore tratto d'aria = 1,57 – 0,003 = 1,567 m.

Il tratto d'aria vale dunque **0,003** m.

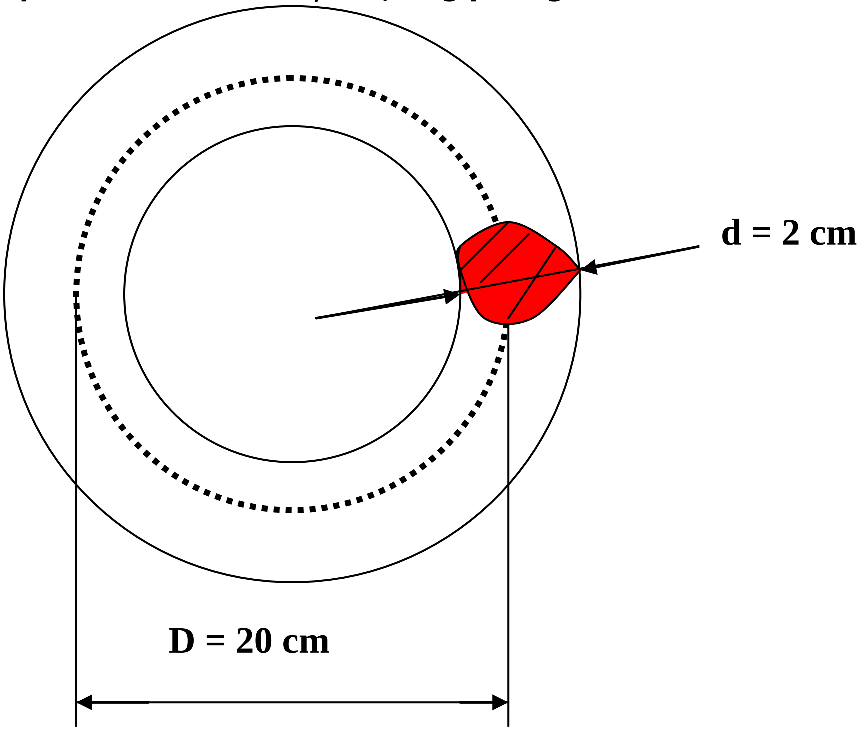
Visto che deve essere prodotto lo stesso flusso, anche l'induzione magnetica B deve rimanere la stessa.
In definitiva si può ammettere che la **F. m. m = (NI) Ferro + (NI) aria**, dove **(NI) Ferro = H L = 2.000 . 1,567 = 3134 Asp**, in pratica rimangono quasi invariate rispetto la situazione precedente.

Inoltre deve risultare: **(NI) aria = Ha . spessore traferro**,
con $\mathbf{Ha = B / \mu 0 = 1{,}5 / (1{,}256 \cdot 10^{-6}) = 1{,}194 \cdot 10^{6}\ Asp / m}$ circa, da cui si deduce che $\mathbf{(NI)\ aria = Ha \cdot spessore\ traferro = 1{,}194 \cdot 10^{6} \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 3582\ Asp.}$
In definitiva si capisce che l'effetto del traferro comporta un aumento della F. m. m se si vuole mantenere la stessa induzione ed lo stesso flusso magnetico:
(F. m. m) totale = F. m. m = (NI) Ferro + (NI) aria = 3134 + 3582 = 6716 Asp.

In questo caso, se non si vuole aumentare il numero di spire avvolte nel toroidale è necessario aumentare il valore della corrente:

I (con traferro) = F. m. m / N = 6716 / 500 = 13,43 A.

ESERCIZIO 8 **In un toro di materiale non magnetico, ($\mu = \mu_0$), del diametro medio D = 20 cm, con sezione circolare di diametro d = 2 cm, si vuole creare un'induzione B = 0,03 Wb/m². Determinare il peso di rame occorrente per l'avvolgimento, utilizzando il rame con una densità di corrente di 2 A/mm² e sapendo che il peso specifico del rame è γ = 8,9 Kg per ogni dm³.**



Supponiamo di realizzare un avvolgimento uniformemente distribuito sul toro. Il calcolo della riluttanza del circuito magnetico si calcola nel modo seguente:

$$\Re = l / \mu_0 S = \cancel{\pi} D / (\mu_0 \cancel{\pi} d^2 / 4) = 4 D / (\mu_0 d^2) = \cancel{4} . 0,2 / (1,256 . 10^{-6} . \cancel{4} . 10^{-4})$$

$$= (0,2 / 1,256) . 10^{10} = 0,159 . 10^{10} = 1,59 . 10^{9} = 1,59 \text{ G Asp / Wb.}$$

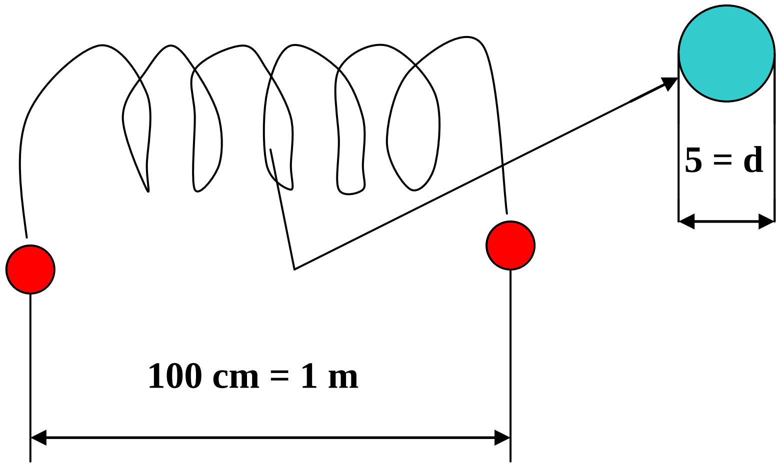
Il flusso che attraversa la sezione del toro vale:
$\phi = B . S = B . \pi d^2 / 4 = 0,03 . \pi . (0,02)^2 / 4 = 0,00000942 \text{ Wb} = 9,42 . 10^{-6} \text{ Wb}$, da ciò la forza magnetomotrice richiesta è data come:

$$NI = \Re \phi = 1,59 . 10^{9} . 9,42 . 10^{-6} = 15. 10^{3} = 15000 \text{ Asp circa.}$$

Questa forza magnetomotrice può essere prodotta scegliendo valori diversi per la I e per la N, purché NI sia quello da Noi ricavato. Il volume del rame necessario allo scopo, è in prima approssimazione, dipendente da NI e dalla densità G di corrente scelta. La corrente I risulta, pertanto, uguale al prodotto della densità di corrente G per la sezione s di un conduttore. In definitiva il volume V dell'avvolgimento è il prodotto della sezione s di una spira per la sua lunghezza, (che è circa uguale al perimetro della sezione del toro), e per il numero di spire: $V = s N \pi d$, ma $G = I / s$ e ciò implica che, $s = I / G$, cosicché la relazione esprimente il volume si può così trasformare,
$V = s N \pi d = (NI / G) \pi d = (15000 / 2 . 10^{6}) . \pi . 2. 10^{-2} = 0,00047 \text{ m}^3 = 0,471 \text{ dm}^3.$
Infine, sapendo il peso specifico del rame, γ = **8,9 Kg / dm³.** è possibile determinare il peso complessivo dell'avvolgimento del toroidale:
Peso avvolgimento = γ . Volume = γ . V = 8,9 . 0,47 = 4,2 Kg circa.

<u>ESERCIZIO 9</u> **Quante spire deve avere un solenoide in aria lungo 100 cm, col diametro d = 5 cm, perché la sua induttanza sia di 3 mH ?**

La figura può essere così schematizzata:



Noi sappiamo che $\mathbf{N\phi = LI = N\,BS = N\,(\,\mu 0\,H\,)\,S}$, da ciò si capisce che:

$$\mathbf{L = (\,N\,(\,\mu 0\,H\,)\,S\,)\,/\,I}.$$

La legge di Hopkinson ci consente di ammettere anche, che: $\mathbf{NI = Hl}$, e perciò si desume che $\mathbf{I = Hl\,/\,N}$, se questo valore lo sostituiamo nella relazione superiore otteniamo in forma definitiva, l'espressione di **L**,

$$\mathbf{L = (\,N\,(\,\mu 0\,H\,)\,S\,)\,/\,I = (\,N\,(\,\mu 0\,H\,)\,S\,)\,/\,(\,Hl\,/\,N\,) = (\,\mu 0\,N^2\,S\,/\,l\,)}.$$

Il problema richiede di determinare il numero di spire N necessarie a determinare un valore di induttanza L dato, ossia:

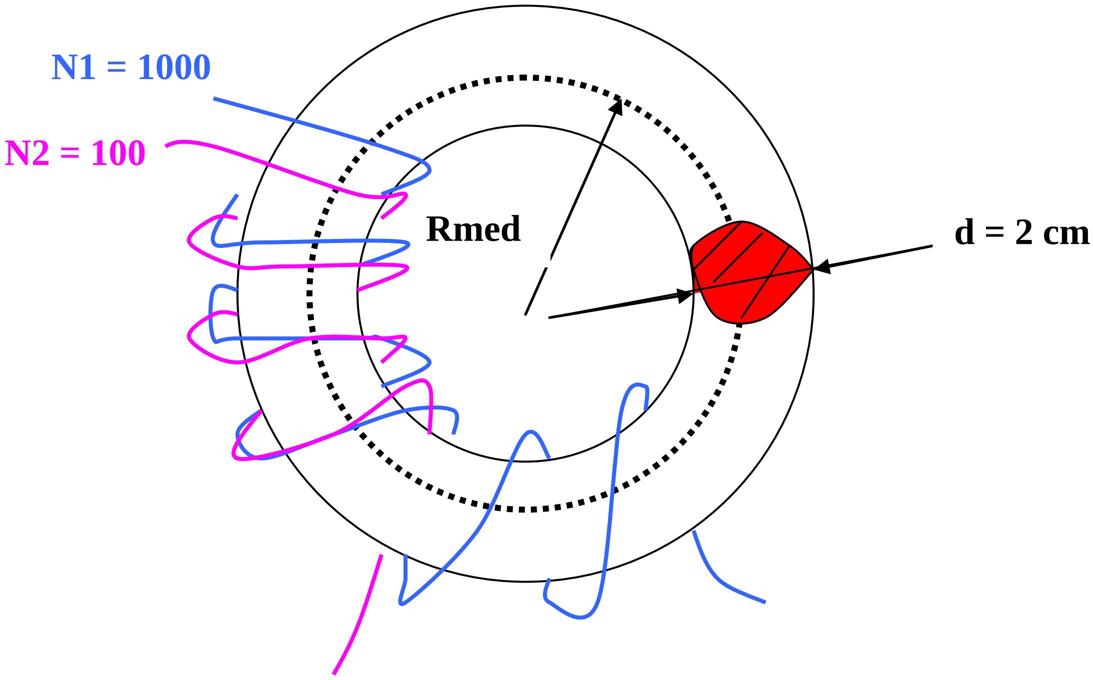
$$\mathbf{N^2 = L\,l\,/\,\mu 0\,S}, \text{ con } \mathbf{S = \pi\,d^2\,/\,4 = \pi\,(\,0{,}05\,)^2\,/\,4 = 0{,}00196\ m^2}, \text{ da cui}$$

$$\mathbf{N^2 = 3\,.\,10^{-3}\,.\,1\,/\,(\,1{,}256\,.\,10^{-6}\,.\,1{,}96\,.\,10^{-3}\,) = (\,3\,/\,(\,1{,}256\,.\,1{,}96\,)\,.\,10^{-3+6+3}},$$

$$\mathbf{N^2 = 1{,}219\,.\,10^{6}},$$

$$\mathbf{N = \sqrt{1{,}219\,.\,10^{6}} = 1{,}\,104\,.\,10^{3} = 1104\ spire\ circa\ .}$$

ESERCIZIO 10 **Sopra una bobina toroidale in aria, di raggio medio Rm = 50 cm, con sezione circolare di diametro 2 cm, e numero di spire N1 = 1.000, uniformemente distribuite, è avvolta una seconda bobina di N2 = 100 spire. Calcolare il coefficiente di mutua induzione tra i due circuiti, sapendo che la permeabilità magnetica del materiale che costituisce il toro è uguale a quella dell'aria.**



Rmed = 50 cm = 0,5 m, **d = 2 cm = 0,02 m,** $\mu = \mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6}$.

Noi sappiamo che il campo magnetico all'interno del toroidale vale:
$H = NI / 2 \pi R$, perciò possiamo ammettere che, $H = N_1 I_1 / \pi (\text{Diametro})_{MED}$.
Il flusso prodotto sarà dunque espresso da:
$\phi = B S = \mu_0 H S$, da cui considerando la relazione superiore,
$\phi = B S = \mu_0 H S = (\mu_0 S N_1 I_1) / \pi (\text{Diametro})_{MED}$, e con $S = \pi d^2 / 4$,

$$\phi = (\mu_0 N_1 I_1 \cancel{\pi} d^2) / 4 \cancel{\pi} (\text{Diametro})_{MED},$$

$$\phi = (\mu_0 N_1 I_1 d^2) / 4 (\text{Diametro})_{MED},$$

il coefficiente di Mutua induzione **M** si può facilmente calcolare perché, esso, è rappresentato dal rapporto fra il **flusso concatenato** con le **N2 spire** del secondo avvolgimento e la corrente che la produce, ossia con la **corrente che circola nel primo avvolgimento**, ossia, la corrente **I1**. In base a quanto affermato potremo allora ammettere che:

$$M = N_2 \phi / I_1 = (N_2 / \cancel{I_1}) ((\mu_0 N_1 \cancel{I_1} d^2) / 4 (\text{Diametro})_{MED}),$$

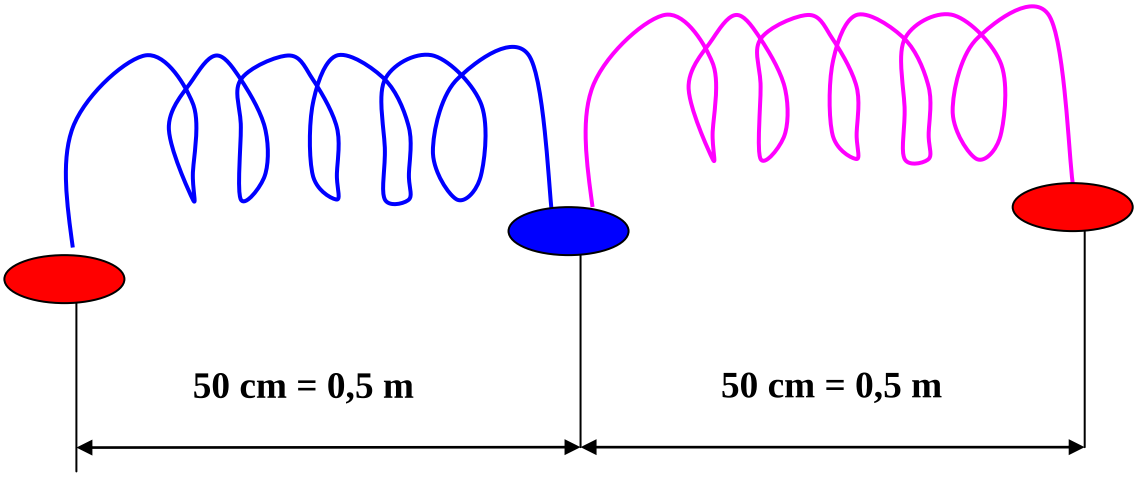
che in forma definitiva può essere scritta nel modo seguente,

$$M = (\mu_0 N_1 N_2 d^2) / (4 (\text{Diametro})_{MED}) =$$

$$= 1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 1000 \cdot 100 \cdot (0{,}02)^2 / 4 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^5 \cdot \cancel{4} \cdot 10^{-4} / \cancel{4} = M =$$

$$M = 1{,}256 \cdot 10^{-6+5-4} \text{ Henry} = 1{,}256 \cdot 10^{-5} \text{ H} = 1{,}256 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} \text{ H} = 0{,}01256 \text{ mH}.$$

ESERCIZIO 11 **Calcolare il coefficiente di autoinduzione totale di un circuito costituito da due solenoidi concentrici, con avvolgimenti concordi in aria e collegati in serie. I due solenoidi sono entrambi lunghi 50 cm, hanno rispettivamente diametro di d1= 2 cm, d2 = 3 cm, e con numero di spire N1 = 500, N2 =300.**



Il coefficiente di autoinduzione totale del circuito di figura, si ottiene dalla seguente relazione: **$L = L1 + L2 + 2\,M$.**

Si tenga presente che: **$d1 = 2$ cm $= 0{,}02$ m** ; **$d2 = 3$ cm $= 0{,}03$ m** ; **$N1 = 500$ spire** ; **$N2 = 300$ spire**.

Si ammetta la seguente ipotesi, sia I1 la corrente che percorrono le N1 spire del primo solenoide.

Inoltre Noi sappiamo che: **$N\,I = H\,l = \Re\,\phi = B\,l\,/\,\mu 0$.**

In base a quanto scritto e alla ipotesi posta si capisce che:

$M = N1\,I1\,/\,l1$, **$B = \mu 0\,N1\,I1\,/\,l1$** e **$\phi c = N1\,\phi = N1\,B\,S1$**,

con **$S1 = \pi\,(d1)^2\,/\,4 = \pi\,.\,(\,0{,}02\,)^2\,/\,4 = 0{,}000314$** circa,

pertanto **$\phi c = (\,N1\,B\,\pi\,(d1)^2\,)\,/\,4$**, ma **$B = \mu 0\,N1\,I1\,/\,l1$**

e potremo scrivere,

$\phi c = (\,\mu 0\,N1^2\;\pi\,(d1)^2\;I1\,)\,/\,4\,l1$, da quest'ultima relazione si ricava immediatamente il valore del coefficiente di autoinduzione del primo solenoide:

$L1 = \phi c\,/\,I1 = (\,\mu 0\,N1^2\;\pi\,(d1)^2\,)\,/\,4\,l1 =$

$= (\,1{,}256\,.\,10^{-6}\,.\,\cancel{25}\,.\,10^{4}\,.\,\pi\,.\,\cancel{4}\,.\,10^{-4}\,)\,/\,\cancel{4}\,.\,\cancel{5}\,.\,10^{-1} = L1 =$

5

$= 1{,}256\,.\,5\,.\,\pi\,.\,10^{-6+\cancel{4}-\cancel{4}+1} = 19{,}73\,.\,10^{-5} = 197{,}3\,.\,10^{-1}\,.\,10^{-5} = 197{,}3\,.\,10^{-6} = 197{,}3\ \mu H$.

In modo perfettamente analogo si può calcolare **L2**, ossia:

$L2 = \phi c\,/\,I2 = (\,\mu 0\,N2^2\;\pi\,(d2)^2\,)\,/\,4\,l2 =$

$(\,1{,}256\,.\,10^{-6}\,.\,9\,.\,\cancel{10^{4}}\,.\,\pi\,.\,9\,.\,\cancel{10^{-4}}\,)\,/\,4\,.\,5\,.\,10^{-1} =$

$= (\,1{,}256\,.\,81\,.\,\pi\,/\,2\,)\,10^{-6} = 159{,}7\,.\,10^{-6} = 159{,}7\ \mu H$.

Per calcolare la MUTUA INDUTTANZA **M**, occorre ammettere che un solenoide sia percorso da una corrente I e l'altro solenoide sia investito dal flusso da esso prodotto, ossia prodotto dalla corrente circolante nel primo solenoide. In poche parole sia:

$\phi 21$ = (flusso prodotto dalla corrente circolante nel primo circuito che si concatena col secondo) = $B\,S1 = \mu 0\,N1\,S1\,I\,/\,l1$.

Il flusso in oggetto si concatena con le **N2** spire del secondo circuito. A tale flusso concatenato diamo il nome di ϕ*****, da ciò è allora:
$\boldsymbol{\phi^* = N2\ \phi21 = \mu0\ N1\ N2\ S1\ I\ /\ l1,}$ ne segue infine che la mutua induttanza **M** è espressa dalla relazione,
$$\mathbf{M = \phi^* / I = \mu0\ N1\ N2\ S1 / l1 = (1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot \cancel{5} \cdot 3 \cdot 10^{4} \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-4}) / \cancel{5} \cdot 10^{-1} =}$$
$$\mathbf{= (1{,}256 \cdot 3 \cdot 3{,}14) \cdot 10^{-6\cancel{+4}\cancel{-4}+1} = 11{,}83 \cdot 10^{-5} = 118{,}3 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-5} = 118{,}3 \cdot 10^{-6} =}$$
118,3 μ H.

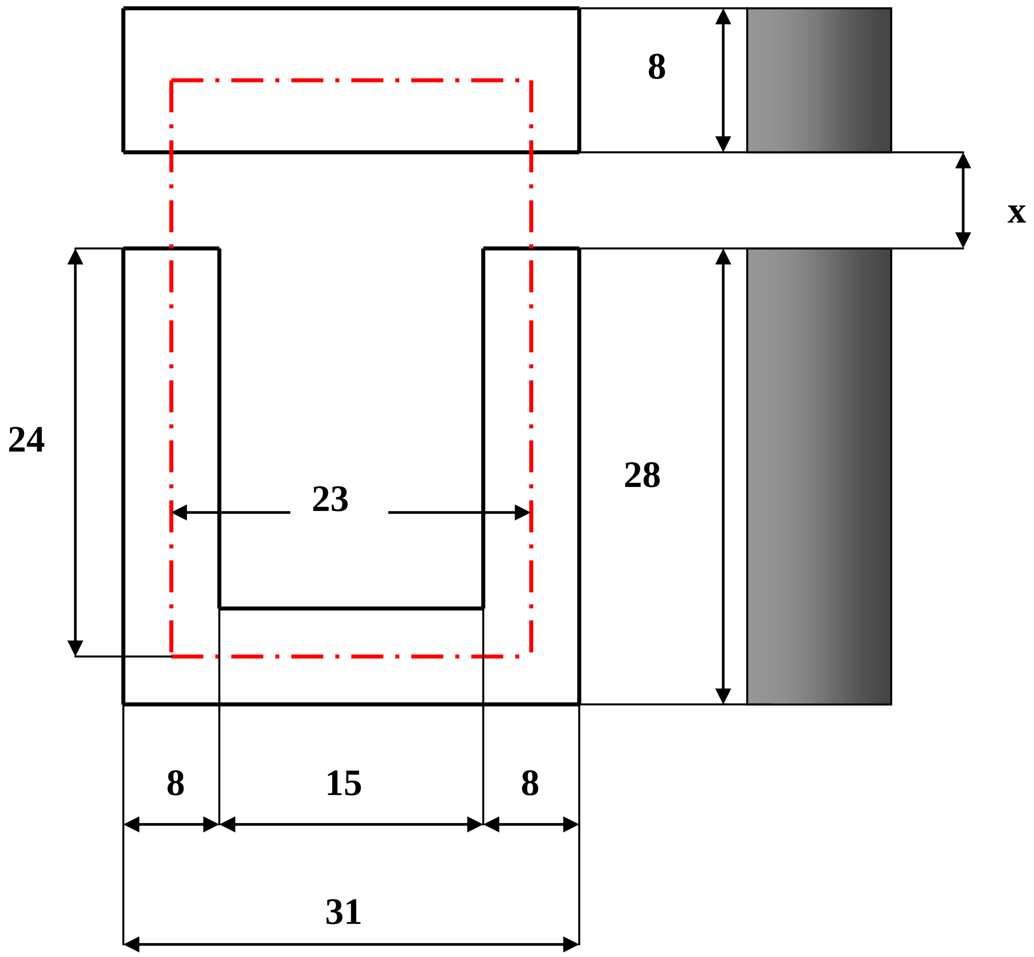
Se si ammette che il flusso prodotto da una corrente I, circolante nel secondo solenoide, si concateni con il primo solenoide, in modo tale che il segno sia concorde, allora le due mutue induttanze si sommano e perciò risulterà:

$\mathbf{L = L1 + L2 + 2\ M = (197{,}3 + 159{,}7 + 2 \cdot 118{,}3)\ \mu\ H =}$ circa **594 μ H.**

ESERCIZIO 12 **Si ha, un nucleo di lamiere in ferro normale della forma e delle dimensioni riportate in figura.**
Con tale nucleo si vuole realizzare un'induttanza di 0,1 Henry, con la condizione che facendo attraversare l'avvolgimento con una corrente di 20 A, l'induzione nel ferro sia di 0,4 Wb/m². Si calcoli il numero delle spire da avvolgere, sulla lamiera, e lo spessore del traferro. Le caratteristiche di magnetizzazione del ferro è riportata nella tabella qui riportata:

B (Wb/m²)	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,8**	**0,9**	**1**	**1,1**	**1,2**	**1,3**	**1,3**	**1,4**	**1,5**
H (Asp/cm)	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,9**	**1,3**	**2,3**	**3,3**	**4,7**	**6,3**	**8**	**10,5**	**10,5**	**13,5**	**25**

Inoltre la figura di riferimento è la seguente:



Dal testo si evidenzia che si vuole ottenere tale induttanza con un'induzione **B** di **0,4** Wb / m², per tale valore si determina un valore del campo magnetizzante
H = 0,7 Asp / cm = 70 Asp / m.
Inoltre, è possibile calcolare il valore del flusso come: **ϕ = B S**
con S = (0,08)² = 0,0064 m² e quindi

ϕ = B S = 0,4 . 0,0064 = 0,00256 Wb = 2,56 mWb.

D'altra parte l'induttanza dell'avvolgimento è definita dalla seguente relazione:
ϕc = N ϕ = L I e da essa posso dedurre il numero delle spire,

N = LI / ϕ = 10^{-1} . 20 / 0,00256 = circa **781** spire.

In definitiva la forza magnetomotrice che agisce sul nucleo è:

F. m. m = NI = 781 . 20 = 15620 Asp.

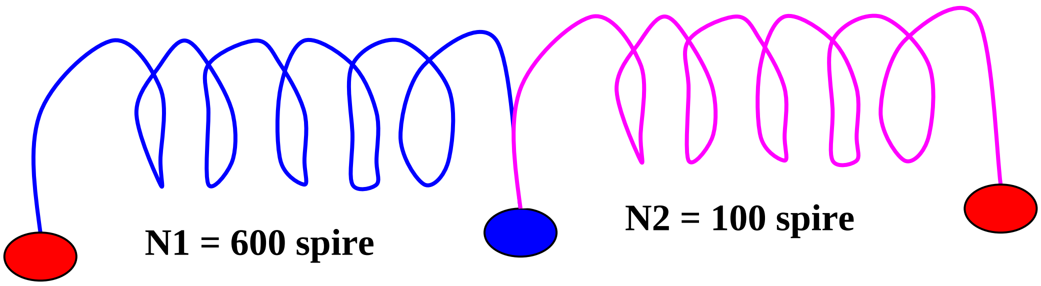
Dalla tabella di magnetizzazione, abbiamo desunto che, per il valore di induzione richiesto, è necessario, un campo magnetizzante di **70 Asp / m** . Proprio per questa ragione si deve

determinare la lunghezza media del circuito magnetico o del percorso nel ferro, comprensiva della traversa di chiusura. Nel nostro caso si determina che:
$L_{FEmedia}$ = 2 (15 + 4 + 4) + 2 (28) = 46 + 56 = 102 cm = 1,02 m.
In base al risultato ottenuto si ottiene che la forza magnetomotrice assorbita dal ferro vale: **(F. m. m $_{FE}$) = H . $L_{FEmedia}$ = 70 . 1,02 = 71,4 Asp.**

Conoscendo la forza magnetomotrice totale è possibile determinare la forza magnetomotrice necessaria per indurre nei due traferri di apertura non nota x, mediante la differenza fra: **F. m. m - F. m. m $_{FE}$ = (15620 – 71,4) = 15548,6 Asp**.
E' altresì vero che la forza magnetomotrice assorbita dai due traferri si può anche pensare come: (**F. m. m)$_{traferri}$ = Ha . la = (B / μ0) 2 x** ,

da cui desumo **x = ((F. m. m)$_{traferri}$. μ0 / 2 B) = (15548,6 . 1,256 . 10^{-6}) / 2 . 0,4 =**
x = 24411 . 10^{-6} m = 0,024411 m = circa **2,44 cm**.

ESERCIZIO 13 **Due bobine in aria di 600 e 100 spire, accoppiate induttivamente ed aventi separatamente le induttanze L1 = 0,5 mH ed L2 = 20 μH, quando sono collegate in serie con i flussi concordi possiedono un'induttanza totale Ltot = 0,6 mH. Determinare il fattore di accoppiamento, l'induttanza totale delle due bobine, quando sono collegate in serie con i flussi discordi, e le induttanze di dispersione delle bobine stesse.**



Noi sappiamo che **Ltot = 0,6.10^{-3} H, L1 = 0,5.10^{-3} H ed L2 = 0,02.10^{-3} H**.
Da ciò posso determinare:

Ltot – L1 – L2 = (0,6 – 0,5 – 0,02) 10^{-3} H = 2 M = 0,08 mH, e perciò risulterà,
M = (0,08 / 2) mH = 0,04 mH.

In particolare si ammette che i due flussi siano concordi in segno, perciò è:
Ltot = L1 + L2 + 2 M
In questo caso il fattore di accoppiamento è dato come:

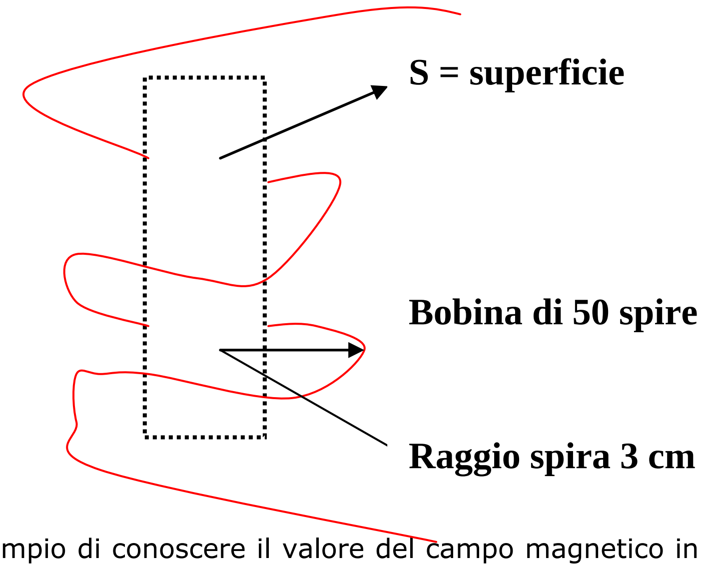
$$k = M / \sqrt{L1\ L2} = 0{,}04 / \sqrt{0{,}5 \cdot 0{,}02} = 0{,}4$$

, si osservi che il fattore di accoppiamento **k** non ha dimensione, ossia è un numero puro.

Se le bobine sono collegate in modo tale che i flussi risultino discordi, allora è possibile considerare che:
Ltot = L1 + L2 – 2 M = 0,5 + 0,02 – 2 (0,02) = 0,44 mH.

In questa situazione i coefficienti di autoinduzione di dispersione **L1d** ed **L2d** si ottengono risolvendo le seguenti relazioni:
L1d = L1 – (N1/ N2) M = 0,5 – (600 / 100) 0,04 = 0,26 10^{-3} H = 0,26 mH;
L2d = L2 – (N2 / N1) M = 0,02 – (100 / 600) 0,04 = 0,0133 10^{-3} H = 0,0133 mH.

<u>ESERCIZIO 14</u> **Determinare il valore medio del campo magnetico nei punti della superficie, abbracciata da una bobina concentrata, di 50 spire circolari di raggio r = 3 cm, di filo sottilissimo disposta in aria, sapendo che quando viene estratta dal campo nel tempo di un secondo si induce in essa una f.e.m di 6 mV.**

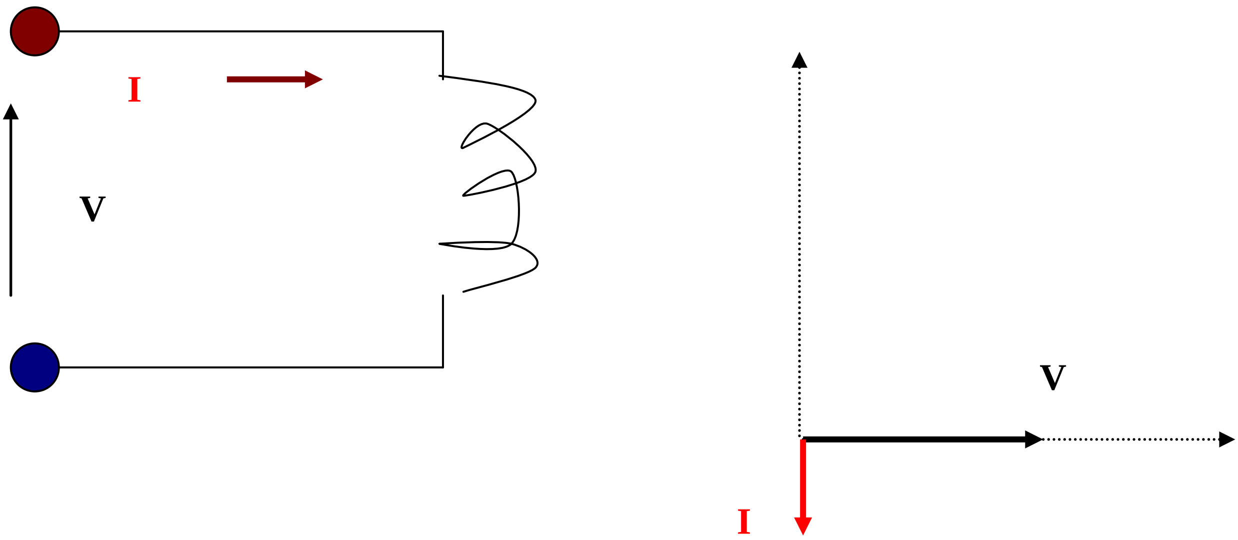


Possiamo ammettere ad esempio di conoscere il valore del campo magnetico in cui è immersa la bobina. In questo modo siamo in grado di calcolare il flusso concatenato con ogni spira: **ϕc = N ϕ = N B S = N μ0 H S**, con **N** numero delle spire ed **S** area occupata dalla spira. Inoltre, Noi sappiamo per la legge di Faraday – Henry – Lenz che: **e = $\Delta\phi$c / Δt**, (dove per l'ipotesi del testo la Δt coincide con 1 secondo). A questo punto si determina che: **e = $\Delta\phi$c = N μ0 H S** e da questo risultato si risale a, **H = $\Delta\phi$c / N μ0 S**, che attraverso i dati del problema si ottiene,

H = $\Delta\phi$c / N μ0 S = 6 . 10^{-3} / (50 . 1,256 . 10^{-6} . π . 9 . 10^{-4}) =
= (6 / (450 . 1,256 . π)) . 10^{-3+6+4} = 0,00338 . 10^{7} = 33,8 . 10^{3} = 33,8 kAsp / m.

CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE

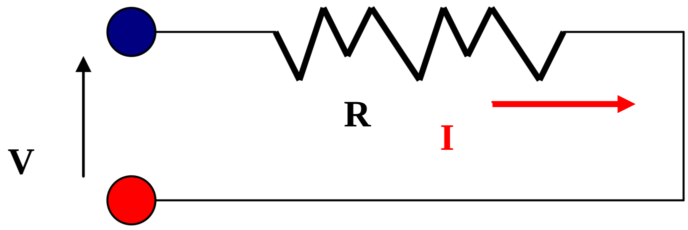
Per quanto detto in precedenza noi sappiamo che un circuito, avente un'induttanza L, percorso da una corrente variabile, è sede di una f.e.m indotta.
Nei circuiti a corrente continua questa f.e.m indotta nasce esclusivamente durante i periodi transitori, cioè in quei periodi dove la corrente passa da un valore all'altro.
In regime di corrente alternata il fenomeno della f.e.m indotta assume un carattere permanente e periodico, dal momento che la corrente varia con continuità ed il valore della f.e.m indotta è definito dalla legge sinusoidale di variazione della corrente stessa. Vediamo ora le caratteristiche e le proprietà della f.e.m indotta indicata.
Dal momento che il flusso magnetico segue rigidamente le vicissitudini della corrente della corrente che lo genera; infatti noi sappiamo che $\phi = LI$.
Poiché la f.e.m indotta dipende dalle variazioni del flusso o della corrente, anch'essa è sinusoidale, ma ha la caratteristica di essere sfasata in ritardo di 90° rispetto al flusso stesso, e quindi rispetto alla corrente stessa. Si veda la figura:



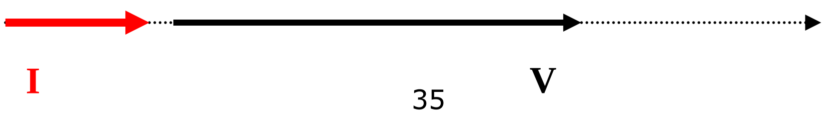
CIRCUITO PURAMENTE OHMICO

L'esistenza di fenomeni nuovi nel caso delle correnti alternate impone una revisione dei vari casi esaminati nel caso continuo, che si possono avere nel caso reale. Per circuito puramente ohmico, si intende un circuito o un tratto di circuito che presenti un valore determinato di resistenza, mentre l'induttanza e la capacità risultino nulle o trascurabili.

Un tale circuito è così schematizzato:



Si osservi che la legge di OHM è valida sia per valori istantanei, che continui, che per i valori efficaci, che per i valori massimi. Infatti nella rappresentazione vettoriale, sia la tensione V che la corrente I sono ugualmente orientati, ossia sono in fase, poiché la resistenza non produce alcun sfasamento fra tensione e corrente. Si veda la seguente figura:



Quindi anche in alternata la legge di OHM può essere scritta:

$v = R\,i$ **per i valori istantanei;**

$V = R\,I$ **per i valori efficaci;**

$V_m = R\,I_m$ **per i valori massimi**.

La legge di Joule è valida in questo caso solo se viene applicata ai valori efficaci delle grandezze, dando dei valori corrispondenti a quelli ottenibili in continua. In altri termini scriveremo: **$P = R\,I^2 = VI = V^2/R$**, essendo **P** il valore della potenza dissipata dalla corrente di valore efficace I sulla resistenza **R**.

CIRCUITO PURAMENTE INDUTTIVO

Si definisce circuito puramente induttivo un circuito o parte di circuito che presenti un determinato valore di induttanza, con resistenza e capacità nulle o trascurabili. In corrente continua un circuito di questo genere non potrebbe funzionare, anche se nella realtà un qualsiasi circuito presenta una resistenza, anche se di valore piccolo o piccolissimo, in quanto rappresenterebbe un corto circuito.

Quanto detto perciò rappresenta una condizione del tutto ideale.

In alternata, viceversa, la presenza della f.e.m di autoinduzione, limita il valore della corrente, ossia se ad un'induttanza pura applichiamo un generatore di tensione alternata, che in un certo momento fornisca tensione in aumento, la corrente tende ad aumentare: la f.e.m indotta, che ha segno opposto alla variazione di corrente, tende a contrastare tale aumento. Per tale motivo in una bobina la corrente aumenta dopo l'avvenuto aumento della tensione.

Analogamente, quando la corrente diminuisce, la f.e.m indotta opposta fa in modo che la corrente diminuisca in ritardo rispetto alla diminuzione della tensione.

In conclusione, se applichiamo una tensione alternata V ad un'induttanza pura, quest'ultima viene percorsa da una corrente in ritardo di 90° rispetto alla tensione che la produce. A sua volta la corrente I dà luogo alla f.e.m indotta Ei, in ritardo di 90° su di essa. Tutto il sistema di tensioni e corrente sarà in equilibrio quando la tensione applicata V sarà uguale ed opposta alla f.e.m indotta, cioè quando:

$$V = E_i,$$

e questo si verificherà per un certo valore della corrente dato da:

$$I = E_i / \omega L = V / \omega L.$$

Da questa formula si vede che il valore che si stabilisce in un circuito puramente induttivo, dipende dalla tensione applicata, dalla pulsazione, (cioè dalla frequenza della tensione stessa), e dall'induttanza L.

Il prodotto ωL viene chiamato: **reattanza induttiva**, e si indica con **X_L;** cioè

$$X_L = \omega L.$$

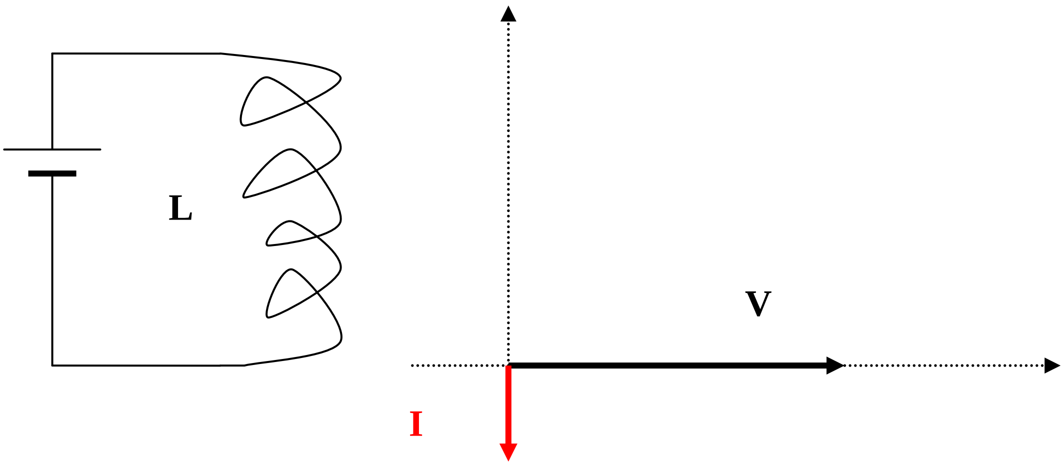
Si osserva che **X_L** si misura **Henry. Hz = (1/s).Ωs = Ω.**

Essa viene misurata in OHM e rappresenta l'opposizione offerta da un avvolgimento al passaggio della corrente alternata.

Dalle formule introdotte si può anche scrivere: **$V = X_L\,I$**,

e questa relazione è analoga a quella della legge di OHM, ad eccezione del fatto che in luogo della resistenza si usa la REATTANZA. Naturalmente V ed I sono i valori efficaci della tensione e della corrente.

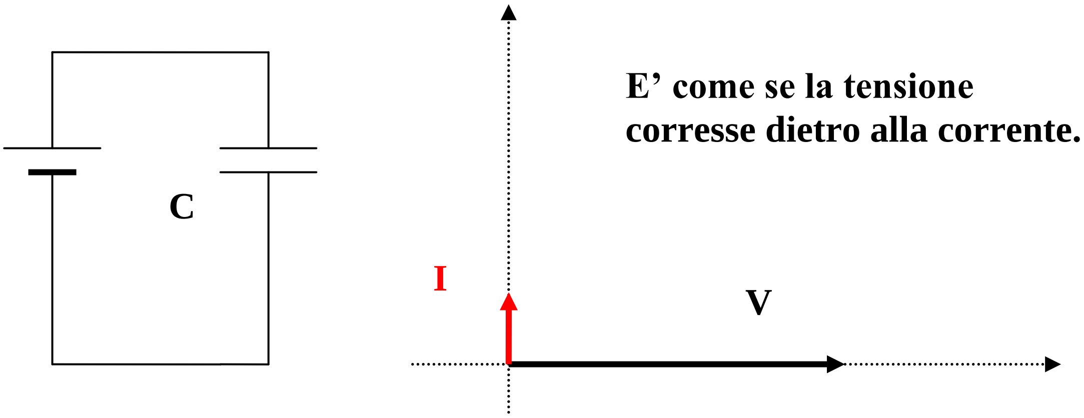
La figura successiva mostra graficamente quanto detto:



La tensione che si manifesta ai capi dell'induttanza è a 90° in RITARDO rispetto alla CORRENTE che lo genera.

CIRCUITO PURAMENTE CAPACITIVO

Nelle condizione ideali un circuito puramente capacitivo si può realizzare con un circuito da un condensatore, mentre la resistenza e l'induttanza del circuito risultano nulli o trascurabili.
In corrente continua il condensatore costituisce un'interruzione del circuito che, a regime, impedisce il passaggio della corrente, mentre in corrente alternata avviene un fenomeno periodico di carica e scarica, e ciò è equivalente ad un passaggio di corrente. Se noi colleghiamo, infatti, un generatore sinusoidale di tensione ad un condensatore, attraverso quest'ultimo circola una corrente detta capacitiva, che anch'essa ha carattere sinusoidale, e che, raggiunge il suo massimo valore quando si ha la massima variazione di tensione, cioè quando la tensione passa per lo zero.
Perciò detta corrente risulterà sfasata di 90° in ANTICIPO, rispetto alla TENSIONE APPLICATA.
Si veda la seguente figura, (di pagina successiva):

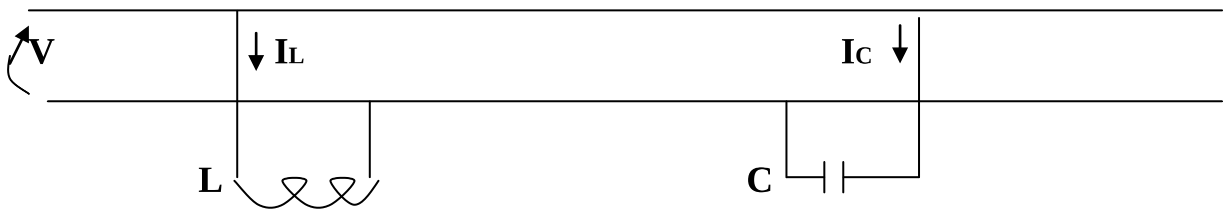


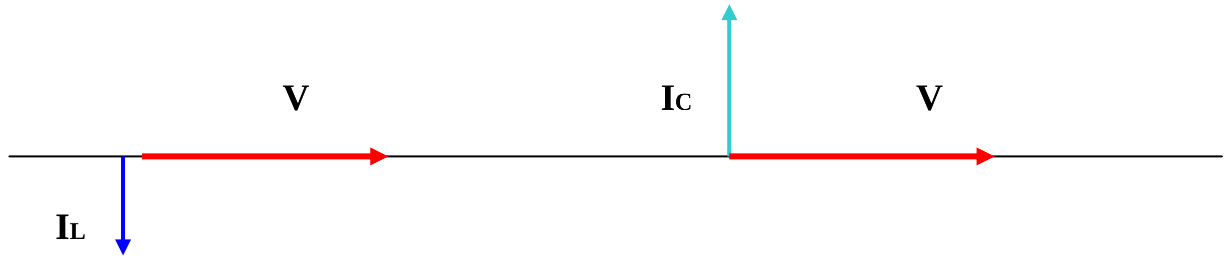
La capacità pur permettendo il passaggio di corrente alternata, offre a questo passaggio una certa resistenza, o meglio una certa opposizione.

L'opposizione dovuta alla capacità di un circuito costituisce ciò che viene indicata col nome di <u>REATTANZA CAPACITIVA.</u> La reattanza capacitiva si indica con **X_C** e si misura in Ω. Inoltre per un circuito capacitivo risulta che: **$I = \omega CV$** e ciò implica che, **$X_C = V/I = V/\omega CV = 1/\omega C$.** E' da notare che **$X_C$ è inversamente proporzionale alla frequenza ed alla capacità,** ossia all'aumentare della frequenza o della capacità, MINORE è la **REATTANZA**, e quindi è maggiore la corrente che passa attraverso esso.

<u>CONFRONTO FRA INDUTTANZA E CAPACITA'</u>

Spesso nei circuiti reali sono presenti delle induttanze e delle capacità, e pertanto è necessario porre in evidenza le analogie e le differenze esistenti nei due casi. Vediamo un primo esempio in cui l'induttanza e capacità siano **derivate** da una medesima sorgente di tensione **V**.

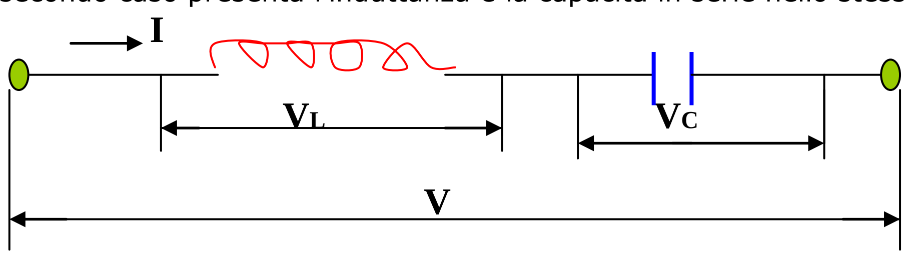


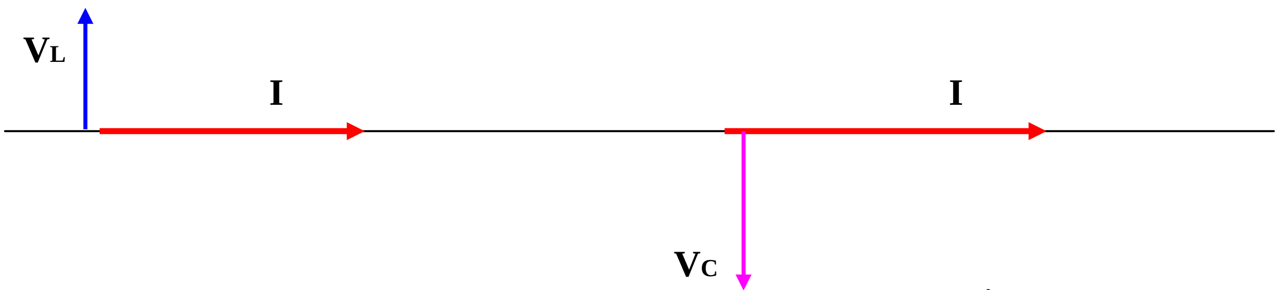


In questo caso la tensione è l'elemento COMUNE dei due elementi, mentre le correnti saranno, per quanto detto in precedenza, in RITARDO di 90° sulla tensione la corrente **I_L** che circola nell'induttanza, ed in ANTICIPO di 90° sulla tensione per quanto riguarda la corrente **I_C**, che circola nella capacità. Inoltre si ricava che:

$$I_L = V/X_L = V/\omega L, \qquad I_C = V/X_C = \omega CV.$$

Il secondo caso presenta l'induttanza e la capacità in serie nello stesso circuito, ossia:



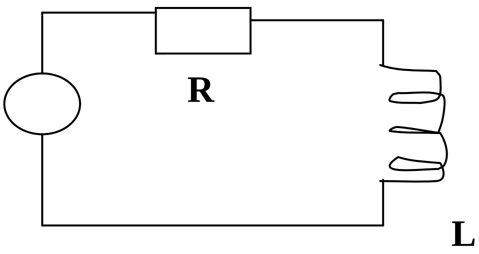


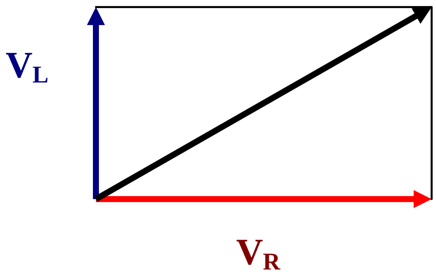
Si capisce per quanto detto che, la tensione ai capi dei due elementi sarà in ANTICIPO di 90° nel caso dell'induttanza e in RITARDO di 90° nel caso della capacità. Inoltre risulterà che: **V_L =**

XL I = ωLI e **VC = XC I = I/ωC,** e questo implica che: **V = VL+VC = ω LI + I/ωC = (ωL + 1/ωC) I = (XL + XC).**

RESISTENZA ED INDUTTANZA IN SERIE

Consideriamo un circuito a corrente alternata sinusoidale, in cui sia contenuta la serie di una resistenza e di un'induttanza. Ricordiamo che in un circuito in serie la corrente risulta eguale in ogni punto. Tuttavia la tensione presente ai capi della resistenza è in FASE, con la corrente, mentre quella ai capi dell'induttanza è sfasata di 90° in ANTICIPO rispetto alla corrente stessa.

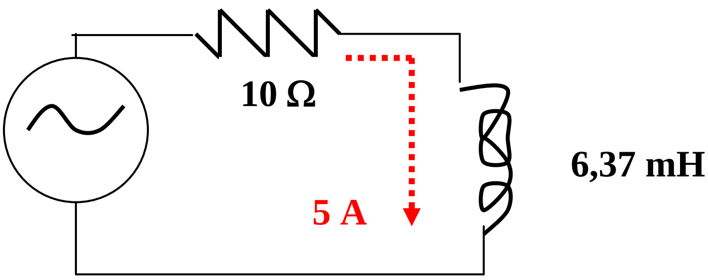




Per determinare la tensione **V** dalla sorgente di TENSIONE è necessario sommare le due tensioni vettorialmente a causa del detto sfasamento.
La caduta **RI** ai capi della resistenza è in FASE con la corrente, mentre la caduta **VL**= **XL I**, ai capi dell'induttanza **L** è in anticipo di 90° rispetto alla corrente.
Pertanto per il teorema do PITAGORA si ricava :

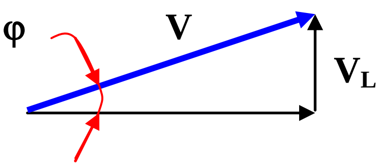
$$V = \sqrt{V_L^2 + V_R^2}$$

Facciamo un esempio per valutare quanto detto. Sia dato il seguente circuito:



Si voglia calcolare il valore efficace della tensione alternata sinusoidale **V** applicata al circuito stesso, nell'ipotesi che l'amperometro abbia misurato un'intensità di 5 A. Dapprima posso calcolare la caduta di tensione sulla reattanza:
VL = XL I = ωLI = 2 π f L I = 2 π (50) (6,37 10^{-3}) 5 = 10 Volt;
la caduta di tensione sulla resistenza vale, **VR = R I = 10 . 5 = 50 Volt**.

Ne segue dal punto di vista vettoriale che:



V_R

In definitiva il valore efficace della tensione si ricava come:

$$\sqrt{50^2 + 10^2} = 51 \text{ Volt.}$$

Per trovare l'angolo di sfasamento φ, potremo scrivere:

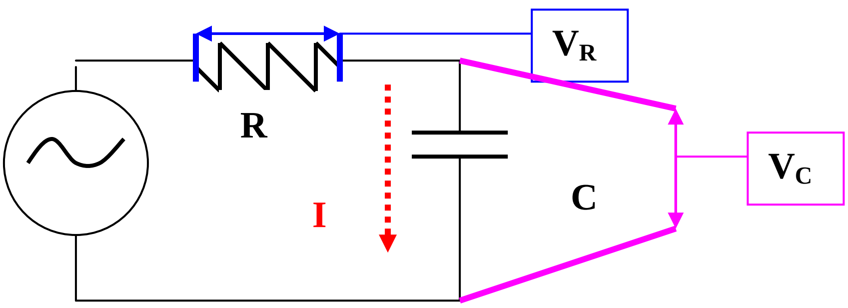
$Tg\ \varphi = V_L / V_R = 10 / 50 = 0{,}2$, da cui si ottiene **$\varphi = 11{,}3°$**.

Se volessimo il valore massimo della tensione trovata, basta ricordare che:

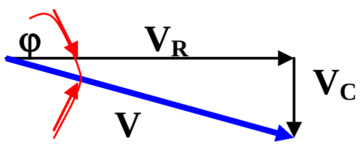
$V_M = (\sqrt{2})\ V = 72{,}12$ Volt.

<u>RESISTENZA E CAPACITA' IN SERIE.</u>

Consideriamo una capacità ed una resistenza collegati in serie ed un generatore di tensione:



In un circuito in serie la corrente, come sappiamo è eguale in ogni punto del circuito sia in intensità che in fase, tuttavia le cadute di tensione ai capi dei due componenti NON SONO UGUALI. Inoltre esse sono reciprocamente SFASATE di 90°; infatti la caduta di tensione VR è in fase con la corrente I, poiché R non produce sfasamento, mentre la tensione VC è in ritardo rispetto alla corrente I di 90°. Si veda la figura superiormente tracciata, (dove I, in questo caso, costituisce il vettore di riferimento). Dato che le tensioni sono sfasate, per ottenere il valore totale di tensione è necessario eseguirne una somma vettoriale.
Si desume per quanto detto dalla seguente figura:



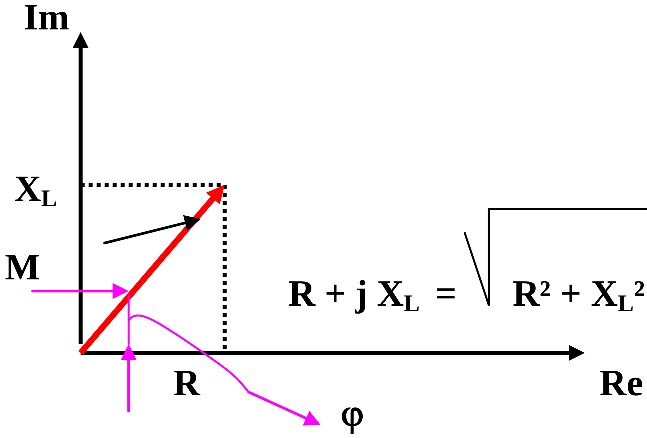
Sulla base di quanto scritto si desume pure che:

$$V = \sqrt{V_C^2 + V_R^2}$$

Si possono così dedurre gli elementi incogniti del circuito:
$V_R = V \cos\varphi$; $V_C = V \operatorname{sen}\varphi$ oppure anche, **$V_R = R\ I$; $V_C = Xc\ I$**, ed ancora,
$R = (V / I) \cos\varphi$; $Xc = (V / I) \operatorname{sen}\varphi$.

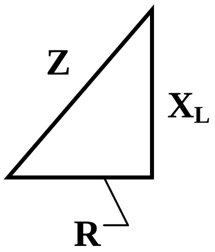
IMPEDENZA

Dato che un qualsiasi circuito ha una sua resistenza, una sua reattanza induttiva ed una sua reattanza capacitiva, **l'opposizione TOTALE** al passaggio della corrente nel circuito stesso è una combinazione tra RESISTENZA e REATTANZA INDUTTIVA e/o CAPACITIVA. Quest'opposizione totale prende il nome di **IMPEDENZA** del circuito, e si indica col simbolo di **Z** e si misura in Ω.
Gli effetti resistivi e reattivi non possono essere sommati aritmeticamente, in quanto, sono sfasati fra loro, per cui la somma va eseguita vettorialmente, ed inoltre detti effetti sono rappresentati vettorialmente.
Esempio, in circuito OHMICO-INDUTTIVO, si scriverà:

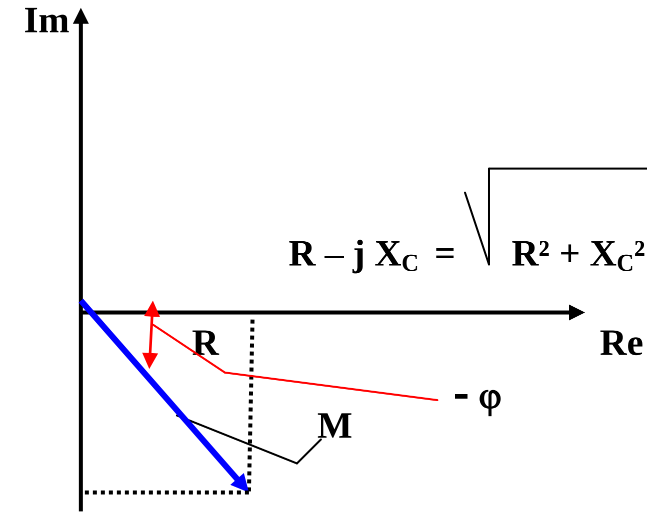


$$R + j X_L = \sqrt{R^2 + X_L^2} \angle tg^{-1} (X_L / R) = M \angle \varphi$$

Questo triangolo è i cosiddetto TRIANGOLO delle IMPEDENZE.

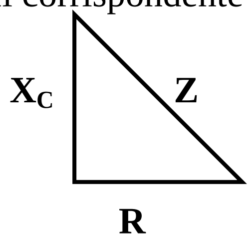


Nel caso OHMICO-CAPACITIVO, scriveremo:

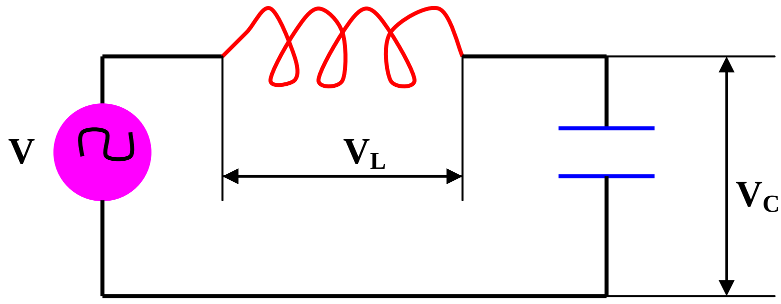


$$R - j X_C = \sqrt{R^2 + X_C^2} \angle tg^{-1} (- X_C / R) = M \angle \varphi$$

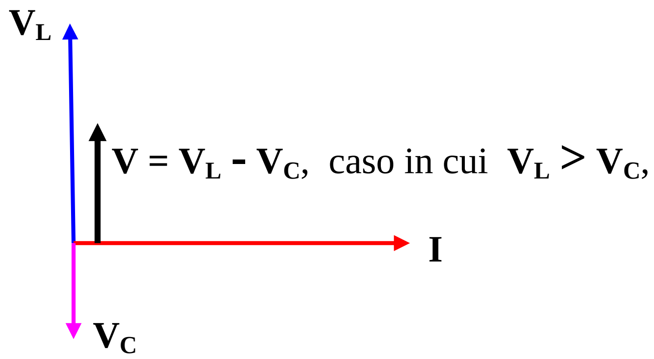
Il corrispondente triangolo è:



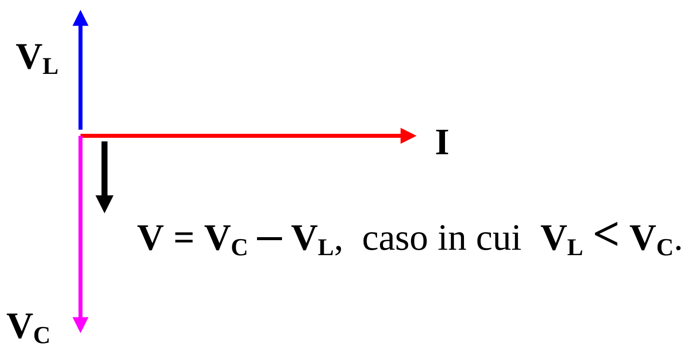
Si voglia valutare l'IMPEDENZA di un circuito serie come questo:



Visto che il circuito è di tipo serie, la corrente viene presa come vettore di riferimento, perciò la caduta di tensione sull'induttanza sarà in anticipo di 90° su di essa, mentre la caduta di tensione sulla capacità sarà di 90° in ritardo sulla corrente. In definitiva, la tensione fornita dal generatore, è espressa come differenza fra le due cadute di tensione indicate. In altri termini sarà del tipo: $\mathbf{V = V_L - V_C}$, nell'ipotesi che la caduta di tensione VL sia maggiore della caduta di tensione VC, in caso contrario scriveremo: $\mathbf{V = V_C - V_L}$, (caso in cui la caduta di tensione sulla capacità C è maggiore della caduta di tensione dell'induttanza).
I grafici relative ai due casi saranno rispettivamente i seguenti:



OPPURE



Potremo, anche, scrivere che: $\mathbf{V = Z\,I}$; $\mathbf{V_L = X_L\,I}$ ed infine $\mathbf{V_C = X_C\,I}$.
Combinandole si desume che:

$$ZI = X_L\,I - X_C\,I = (X_L - X_C)\,I, \text{ da cui si ricava}$$
$$Z = X_L - X_C.$$

Questo risultato è molto importante, esso afferma che in un circuito serie in cui compare una reattanza induttiva e capacitiva, la REATTANZA TOTALE è data dalla differenza fra la **XL** e la

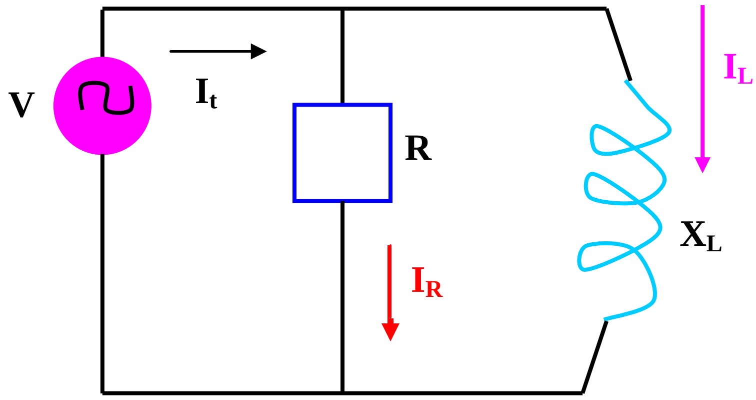
XC. Altra osservazione è che la legge di OHM per le correnti alternate o legge di OHM GENERALIZZATA è espressa come:

$$V = Z \cdot I$$

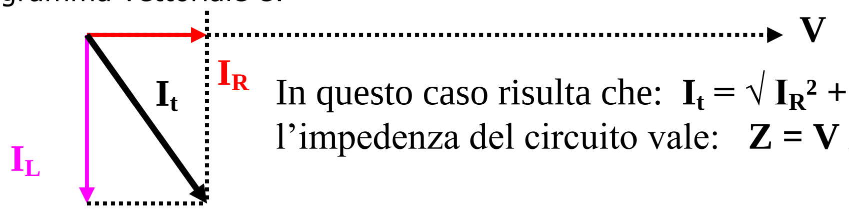
Tale equazione lega il valore efficace della tensione applicata al circuito, con il valore efficace della corrente e il valore dell'impedenza del circuito medesimo.

INDUTTANZA E RESISTENZA IN PARALLELO.

In questo caso il circuito assume la seguente forma:

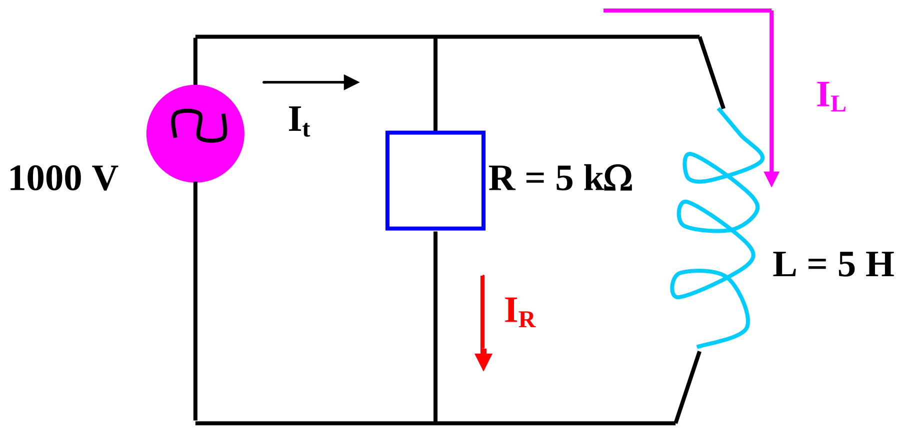


Come avviene per i circuiti a corrente continua, la tensione presente ai capi di ogni ramo del circuito è la stessa. Perciò, in un circuito in parallelo la tensione applicata costituisce il riferimento orizzontale per un diagramma vettoriale, e, le correnti sono rappresentate in senso orario o antiorario rispetto alla tensione.
Il circuito superiore mostra un circuito caratterizzato dal parallelo di una resistenza **R** e una induttanza con valore di reattanza pari a $\mathbf{X_L}$.
Il corrispondente diagramma vettoriale è:



In questo caso risulta che: $\mathbf{I_t = \sqrt{I_R^2 + I_L^2}}$ e l'impedenza del circuito vale: $\mathbf{Z = V / It}$.

ESEMPIO: Sia dato il seguente circuito, di esso si voglia calcolare il valore efficace della corrente, la cui frequenza è di 200 Hz; infine si voglia calcolare l'impedenza totale dei due rami in parallelo.



Per prima cosa determiniamo il valore della reattanza induttiva:

$$\mathbf{X_L = \omega L = 2 \,.\, \pi \,.\, f \,.\, L = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 200 \,.\, 5 = 6{,}28\ k\Omega}.$$

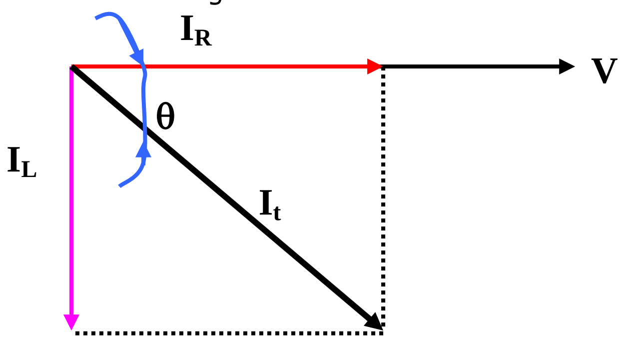
La corrente che percorre l'induttanza vale allora:
$\mathbf{I_L = V / X_L = 1.000 / 6.280 = 0{,}16\ A}$.
Ovviamente, questa corrente è in ritardo di 90° sulla tensione e 0,16 è il suo valore efficace. In modo perfettamente analogo la corrente che attraversa la resistenza è data come: $\mathbf{I_R = V / R = 1.000 / 5.000 = 0{,}2\ A}$.
La corrente totale si ottiene sommando vettorialmente questi due valori, ossia:

$$\mathbf{I_t = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{(0{,}2)^2 + (0{,}16)^2} = 0{,}256\ A}.$$

Se applichiamo la legge di Ohm al circuito intero, l'impedenza di questo stesso circuito vale:

$$\mathbf{Z = V / I_t = = 1.000 / 0{,}256 = 3.900\ \Omega}.$$

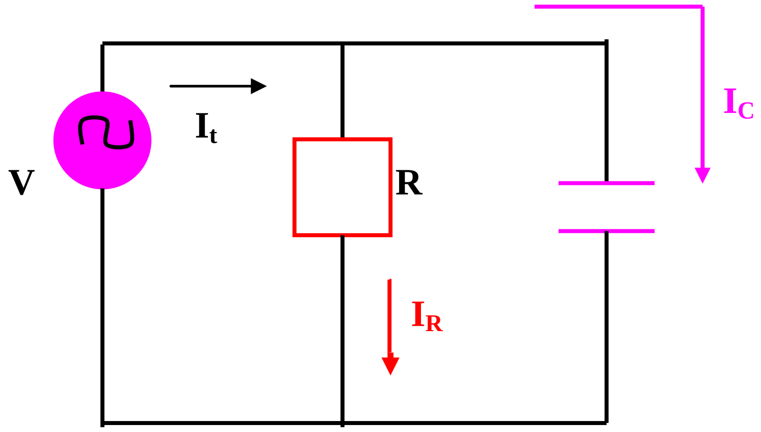
Il diagramma vettoriale assume la seguente forma:



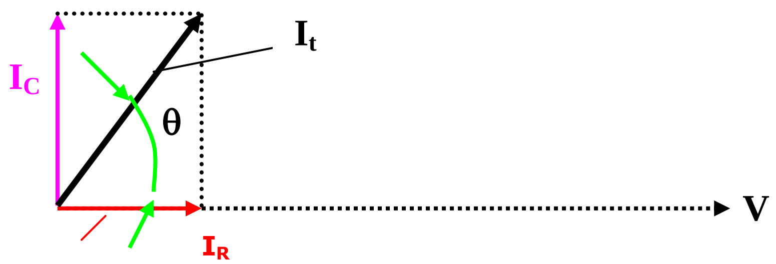
L'angolo θ è l'angolo di sfasamento fra tensione e corrente del circuito. Il coseno di questo angolo prende il nome di **fattore di potenza**.
Nel nostro esempio il fattore di potenza si determina, anche, effettuando il seguente rapporto: **cos θ = I_R / I_t = 0,2 / 0,256 = 0,77.**

RESISTENZA E CAPACITA' IN PARALLELO

In questo caso il circuito si presenta nel modo seguente:

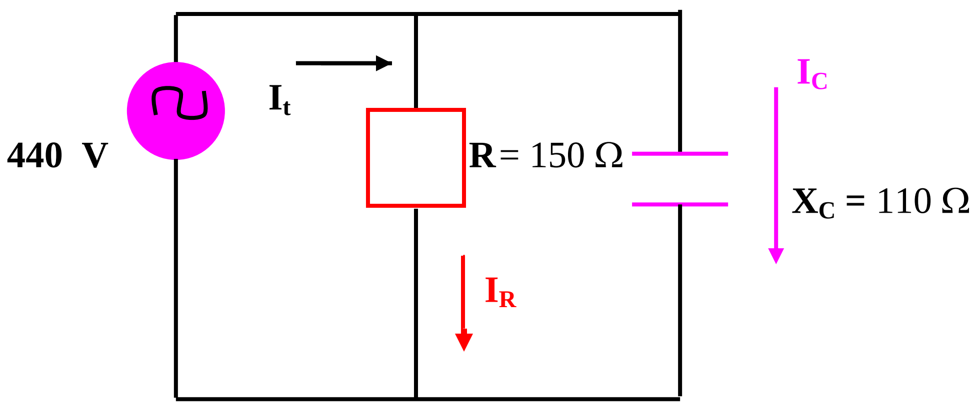


Il corrispondente diagramma vettoriale è:



In questo caso, come si osserva dalla figura superiore, la tensione ai capi della resistenza e della capacità è la medesima, mentre la corrente **IR** si mantiene in fase con la tensione e la corrente **IC** risulta in anticipo di 90° sulla tensione **V** fornita dal generatore.

ESEMPIO: Si vuole calcolare il valore efficace della corrente totale assorbito da un circuito OHMICO-CAPACITIVO, così schematizzato,
In questo caso il circuito si presenta nel modo seguente:

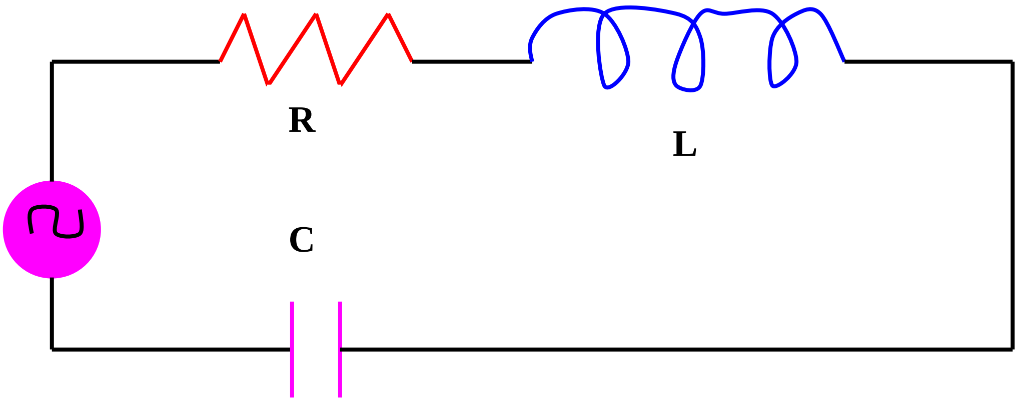


In questo esempio ne risulta che: **I_R = V / R = 440 / 150 = 2,93 A**;
I_C = V / X_C = 440 / 110 = 4 A. In base ai due valori trovati il valore della corrente totale **It = √ I_R^2 + I_C^2 = √ (2,93)² + (4)² = 4,96 A**.
Il fattore di potenza è possibile calcolarlo attraverso il seguente rapporto:

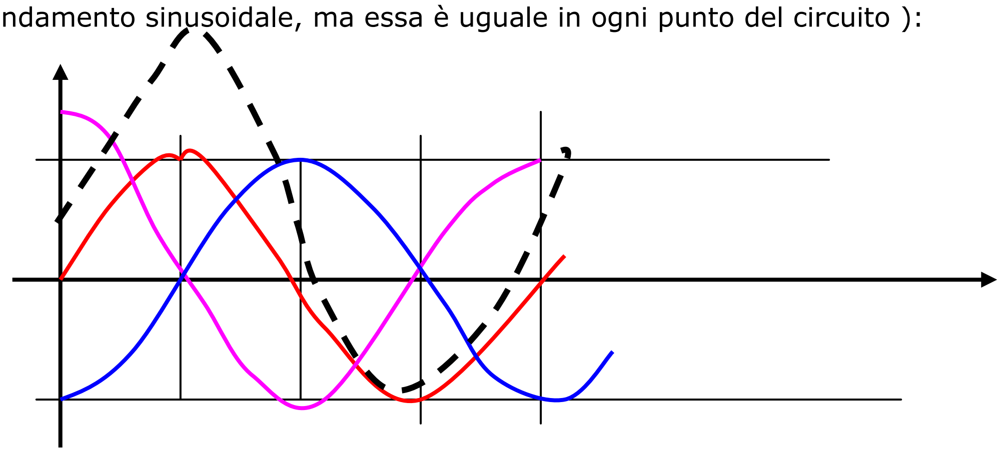
cos θ = I_C / I_t = 2,93 / 4,96 = 0,59.

CIRCUITI R, L, C IN SERIE

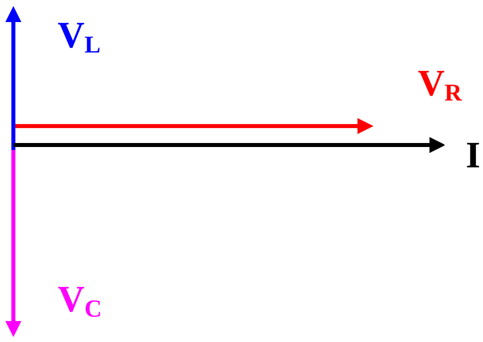
A questo punto possiamo considerare un circuito caratterizzato dalla serie dei 3 componenti fondamentali visti, di un circuito elettrico, ossia:



Questa seconda figura mostra gli andamenti della tensione, (in effetti la corrente I avrà andamento sinusoidale, ma essa è uguale in ogni punto del circuito):



Il diagramma vettoriale può essere il seguente:



Supponiamo ad esempio che, nel circuito precedente, sia:

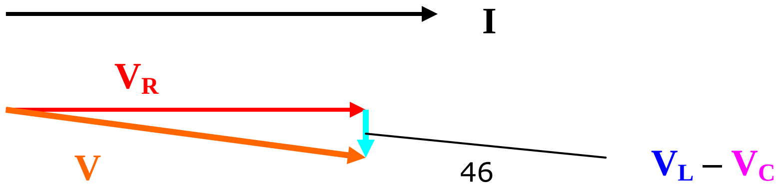
R = 6 Ω, XL = 8 Ω, XC = 16 Ω.

Supponiamo, infine, che la sorgente di alimentazione, abbia valore efficace pari a **300 volt**. (Si ricordi che siamo nel caso di valori variabili nel tempo).

Ricordando che, (<u>si tenga presente che si ragiona in termini di modulo</u>):

(XL – XC) I = X I = (16 – 8) I = 8 I.

In poche parole si ottiene, graficamente, la seguente relazione vettoriale:



Applicando il teorema di Pitagora, al triangolo così costruito, si ottiene:

$$V^2 = (R I)^2 + (X I)^2$$

$$\mathbf{(300)^2 = (6 I)^2 + (8 I)^2 = 36 I^2 + 64 I^2 = 100 I^2}$$

Estraendo la radice quadrata si ricava infine che:

$$\mathbf{10 I = 300, \text{ ossia } I = 30 A}.$$

In definitiva la corrente vale **30 Ampere**.

In base al calcolo della corrente posso ricavare anche che:

$$\mathbf{R I = 6 (30) = 180 \text{ Volt};}$$

$$\mathbf{V_L = XL \;\; I = 8 (30) = 240 \text{ Volt};}$$

$$\mathbf{V_C = XC \;\; I = 16 (30) = 480 \text{ Volt}.}$$

Infine si desume che:

Tg φ = (XL – XC) / R = - 8 / 6 = - 1, 33, a cui corrisponde un angolo φ = -(53,1)°.

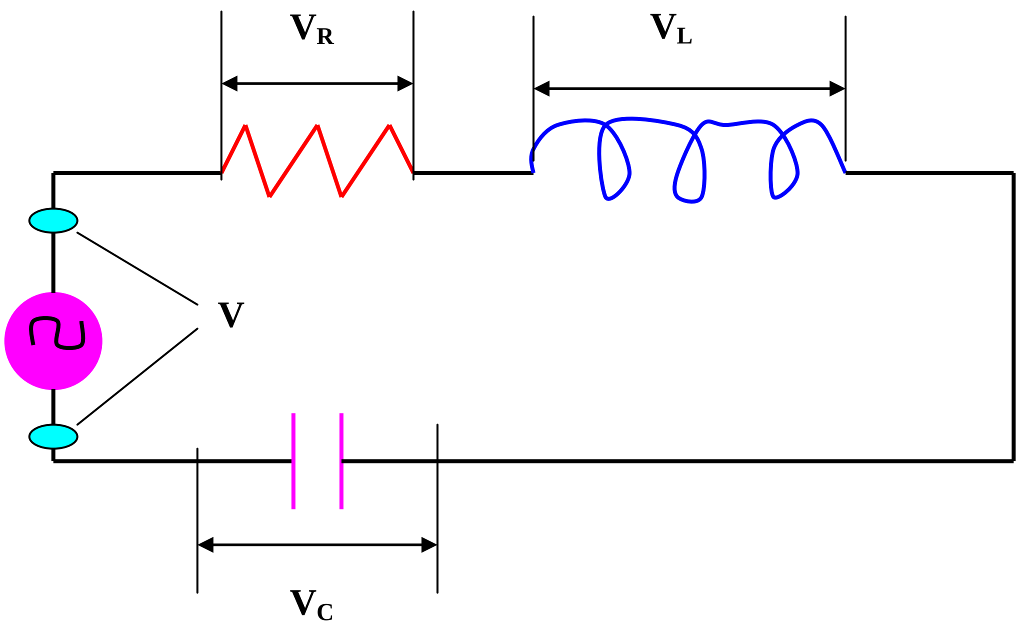
Conclusioni:

Il circuito RLC mette in evidenza i seguenti punti:

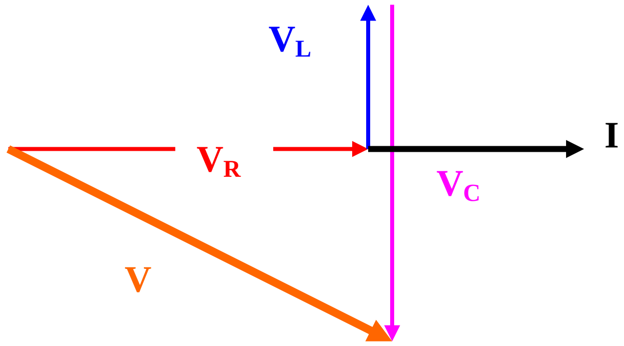
1) la corrente che percorre un circuito RLC può essere in ritardo o in anticipo rispetto alla tensione V, rispettivamente se XL è maggiore o minore di XC.
2) La caduta di tensione capacitiva in un circuito RLC si sottrae sempre alla caduta di tensione induttiva.
3) La caduta di tensione presente ai capi di un elemento avente reattanza, può avere un valore efficace maggiore di quello della tensione di partenza.

ANALISI DI UN CIRCUITO IN SERIE

Le varie relazioni indicate possono essere generalizzate, cioè è possibile calcolare la corrente, l'impedenza, le cadute di tensione e gli angoli di fase in un qualsiasi circuito serie RLC. La figura mostra un generico circuito in serie:



Esso è collegato ad un generatore di tensione sinusoidale di valore efficace V e frequenza f.
La caduta di tensione, VR, presente ai capi della resistenza è espressa in fase con la corrente I.
La caduta di tensione ai capi dell'induttanza è rappresentata dal vettore VL in anticipo di 90° rispetto a VR, mentre la caduta di tensione VC è in opposizione di fase alla caduta VL, e perciò il secondo estremo del vettore VC esprime anche il secondo estremo del vettore V.



$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} = \sqrt{(RI)^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Si verifica pure che:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Se si verificasse il caso in cui ($V_L - V_C$) = 0, ossia $V_L = V_C$, o in altri termini le reattanze X_L ed X_C risultano uguali, allora l'impedenza del circuito RLC, si riduce alla sola resistenza R, cioè l'impedenza coincide con la resistenza del circuito.
In questo caso si dice che il circuito è in **risonanza**.

Resta da valutare, anche, quale sia la frequenza a cui il circuito stesso diviene **risonante**.
In questa situazione le cadute di tensione ai capi dell'induttanza e della capacità sono uguali ed opposte, (sfasamento di 180°).
Noi sappiamo che: $X_L = \omega L$ ed $X_C = 1 / \omega C$. Sappiamo che nel fenomeno di risonanza $X_L = X_C$, ma come se risultasse $\omega L = 1 / \omega C$.
In base a questo risultato la pulsazione di risonanza al quadrato vale:

$$\omega_r^2 = 1 / LC, \text{ da cui } \omega_r = 1 / \sqrt{LC}.$$

La frequenza di risonanza f_r è allora eguale a:

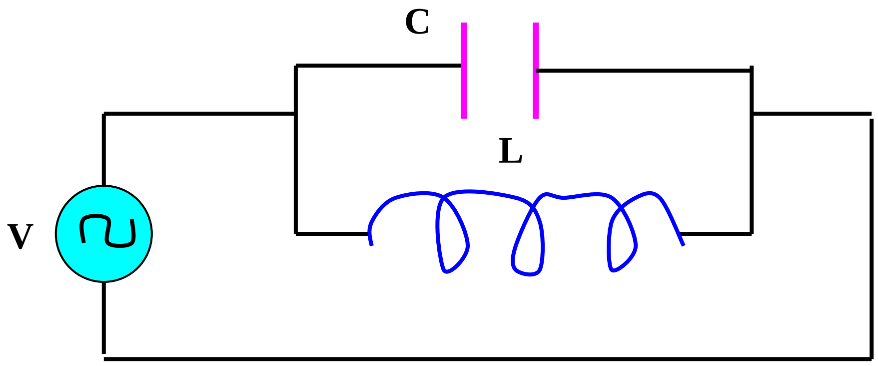
$$f_r = 1 / 2\pi \sqrt{LC},$$

essendo $\omega_r = 2\pi f_r$.

Ricordiamo alcune relazioni fondamentali:
$\mathrm{Tg}\,\varphi = (X_L - X_C) / R$; $R = Z \cos\varphi$; $X = Z \operatorname{sen}\varphi$; $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1 / \omega C)^2}$.

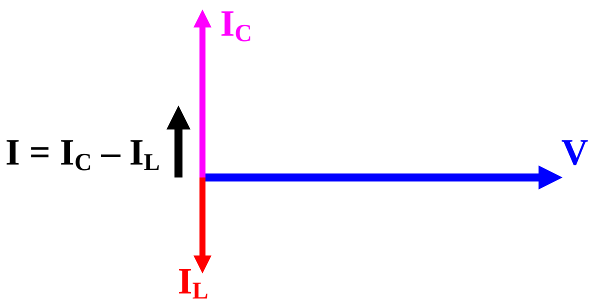
CIRCUITO LC IN PARALLELO

In questo caso trascuriamo la resistenza e pertanto il circuito è caratterizzato dal parallelo di un condensatore e di induttanza.



Sia ad esempio: $X_L = \omega L = 100\ \Omega$ ed $X_C = 1 / \omega C = 50\ \Omega$ e sia applicata, al circuito così costituito, una tensione di valore efficace pari a 300 volt.

La rappresentazione grafica delle correnti è la seguente:



Inoltre si osserva dal grafico che, la corrente che circola nell'induttanza, è a 90° in ritardo rispetto alla tensione, mentre quella che percorre il condensatore è in anticipo di 90°, e ciò ne consegue che le due correnti sono reciprocamente sfasate di 180°. Quindi esse possono essere sommate algebricamente al fine di ottenere la corrente effettiva erogata dal generatore.
Infine la corrente erogata dal generatore è in anticipo di 90° rispetto alla tensione applicata, per cui il circuito si comporta nei confronti del generatore come un circuito CAPACITIVO, in quanto l'effetto della reattanza induttiva è completamente annullata dalla maggiore reattanza capacitiva. L'impedenza totale del circuito si ottiene nel modo seguente: $Z = V/I = 300/3 = 100\ \Omega$.
C'è da osservare che la relazione dell'impedenza, in questo caso è data come:

$$\mathbf{Z = XL\ XC / (XL + XC).}$$

Da cui si può osservare che se le due reattanze hanno valore uguale, ossia nel caso del fenomeno di risonanza, il denominatore del rapporto indicato diviene uguale a zero, e pertanto l'impedenza assume un valore tendente all'infinito. Nella realtà sia l'induttanza L che la capacità C, non possono mai offrire ad un circuito una REATTANZA PURA, per cui si può dire che alla **frequenza di risonanza** un circuito di tipo LC i parallelo offre la massima impedenza alla tensione applicata e la corrente assume un valore minimo. Al di fuori di tale frequenza, l'impedenza totale diminuisce rapidamente dal suo massimo valore, mentre la corrente aumenta con la medesima rapidità.

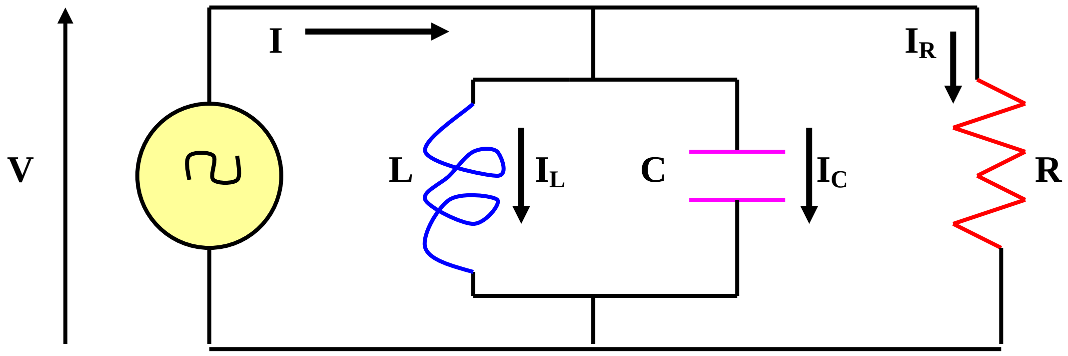
In termini molto semplici è possibile determinare i valori, in modulo, delle due correnti poco sopra indicate, ossia:

$$\mathbf{I_L = 300 / 100 = 3\ A;}$$
$$\mathbf{I_C = 300 / 50 = 6\ A;}$$

e come già si è visto $\mathbf{I = I_C - I_L = (6 - 3) = 3\ A}$.

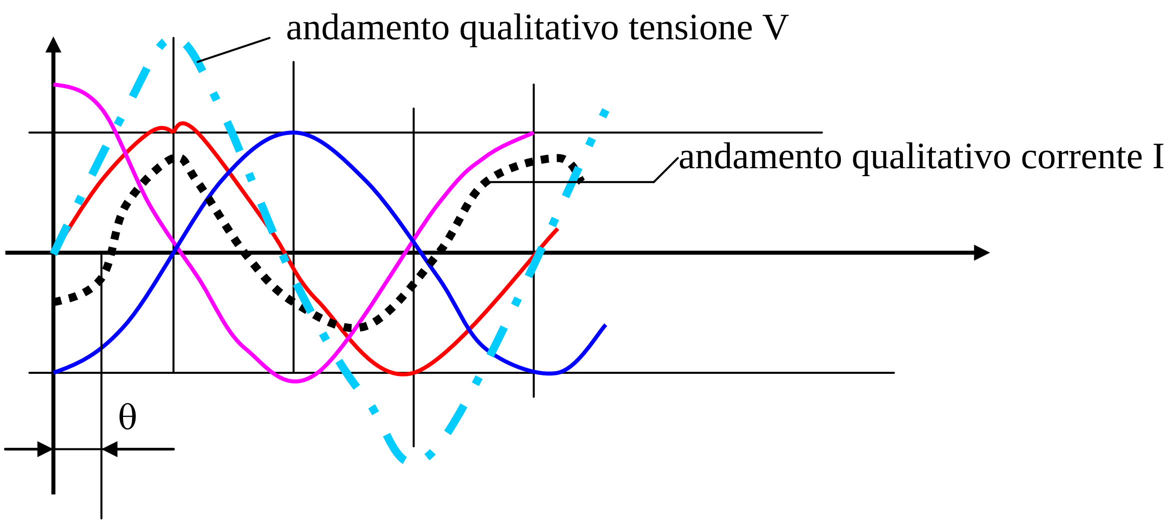
Come si osserva, vale quanto detto anche in regime continuo, ossia la corrente si riversa in maggiore quantità nei rami con minore impedenza.

A questo punto ci è possibile introdurre il circuito R, L, C in PARALLELO:

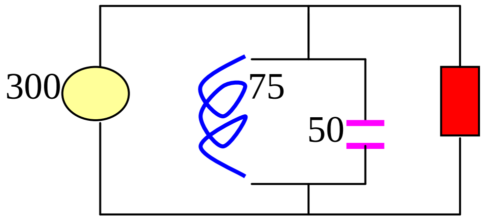


In corrispondenza di qualsiasi punto di non risonanza, ossia per valori di frequenza in cui la reattanza induttiva e capacitiva risultano avere valori diversi, le correnti presenti in L ed in C saranno diverse e sfasate di 180°. La **corrente totale** sarà perciò prevalentemente induttiva o capacitiva a seconda di quale dei due componenti si oppone meno alla tensione applicata. Nei confronti del generatore il circuito risulterà perciò o un'induttanza o una capacità collegata in parallelo ad sistema.

La figura riporta l'andamento qualitativo delle correnti, ed in essa si riporta l'andamento qualitativo della corrente totale, come somma algebrica dei valori istantanei delle tre correnti **IR, IL, IC.**



Questa corrente totale risulta sfasata in ritardo dell'angolo θ, rispetto alla tensione per il fatto che ho ipotizzato che, risulti preponderante l'effetto della reattanza induttiva, rispetto all'azione della reattanza capacitiva.
In questa seconda figura si prende come riferimento la tensione **V**, dove la corrente **IR** risulta in fase con la tensione stessa. Dall'estremo libero del vettore **IR**, in anticipo sulla tensione **V**, si traccia a 90° il vettore della corrente capacitiva **IC**, e dal punto trovato si tracci a 90° in ritardo, rispetto sempre alla tensione, il vettore della corrente induttiva **IL**.
Vediamo ora di effettuare un esempio pratico:

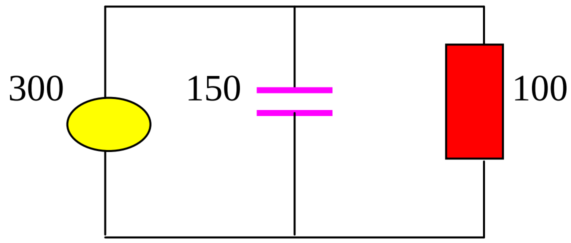


NB. I valori indicati sono tutti espressi in Ω.

Un generatore di 300 volt, alimenta una resistenza e due reattanze in parallelo, i cui valori sono segnati sulla figura stessa. Per prima cosa determiniamo il valore della reattanza equivalente al parallelo dell'induttanza e della capacità:
$X_{EQ} = X_L X_C / (X_L + X_C) = 75 (- 50) / (75 - 50) = - 150\ \Omega$.

La reattanza equivalente è di 150 Ω, e come si vede dal disegno è negativa, ossia è una reattanza capacitiva.

Proprio per questo è possibile trasformare il circuito nel modo seguente:



NB. I valori indicati sono tutti espressi in Ω.

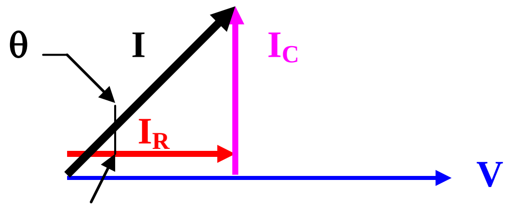
Questo circuito si può risolvere determinando il valore della corrente nella resistenza e nella reattanza:

$$I_R = V/R = 300/100 = 3\ A;$$
$$I_C = V/ X_C = 300/150 = 2\ A.$$

A questo punto è possibile calcolare il valore della corrente totale:

$$I_T = \sqrt{(I_R)^2 + (I_C)^2} = \sqrt{9+4} = 3,6\ A.$$

Qui sotto riportiamo il diagramma vettoriale, nel quale si osserva che la corrente è in anticipo sulla tensione dell'angolo θ.



Il valore di quest'angolo può essere ricavato dalla conoscenza della tangente:

$$Tg\ \theta = I_C / I_R = 2/3 = 0,666, \text{ da cui si ottiene } \theta = 33°,6.$$

Il fattore di potenza del circuito in esame vale:

$$\cos \theta = I_R / I_T = 3/3,6 = 0,834.$$

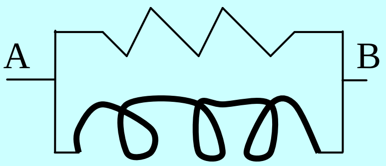
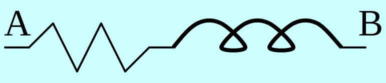
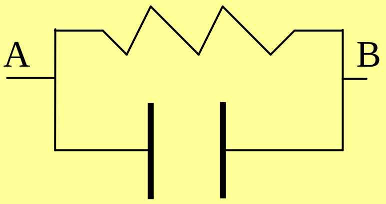
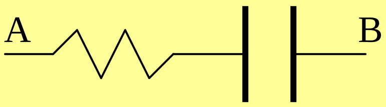
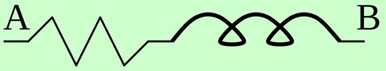
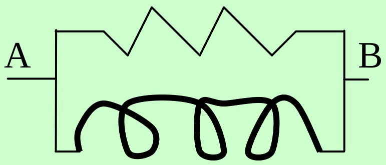
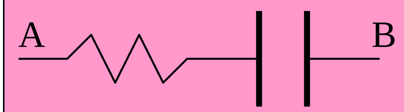
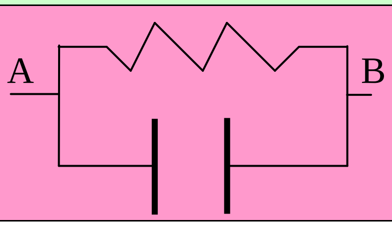
Volendo si può ricavare l'impedenza totale del circuito, essendo sufficiente dividere il valore della tensione applicata per la corrente erogata, cioè:

$$Z = V/ I_T = 300/3,6 = 83,4\ \Omega.$$

CIRCUITI COMPOSTI CON PIU' ELEMENTI IN SERIE ED IN PARALLELO.

Il caso più complesso di circuiti è quello in cui vi sono più elementi comunque disposti all'interno del circuito, ossia si hanno più elementi comunque disposti in serie ed in parallelo. In questo caso è necessario trasformare il circuito nel suo **circuito equivalente**, caratterizzato da una resistenza equivalente e da una reattanza equivalente. In pratica essa ci rappresenta quell'impedenza fittizia vista dal generatore, che simula perfettamente il comportamento del circuito stesso.

La tabella seguente ci permette di ricavare le impedenze equivalenti, in varie situazioni:

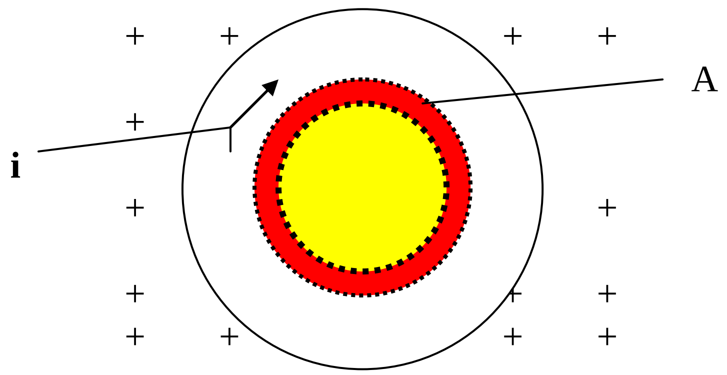
circuito reale	circuito equivalente	formule di trasformazione
		$R_{EQ} = (R \; X_L^2) / (R^2 + X_L^2)$ $X_{LEQ} = (R^2 \; X_L) / (R^2 + X_L^2)$
		$R_{EQ} = (R \; X_C^2) / (R^2 + X_C^2)$ $X_{CEQ} = (R^2 \; X_C) / (R^2 + X_C^2)$
		$R_{EQ} = (R^2 + X_L^2) / R$ $X_{LEQ} = (R^2 + X_L^2) / X_L$
		$R_{EQ} = (R^2 + X_C^2) / R$ $X_{LEQ} = (R^2 + X_C^2) / X_C$

MUTUA INDUZIONE NEI CIRCUIT IN ALTERNATA.

E' noto che se due circuiti sono posti in presenza l'uno dell'altro, può accadere che il campo magnetico generato dal primo arrivi tutto o in parte a concatenarsi con l'altro, e viceversa:
In regime di correnti variabili i due circuiti risultano allora mutuamente dipendenti, perché ogni variazione di corrente nell'uno fa sorgere una f.e.m di mutua induzione nell'altro. L'entità del fenomeno dipende dal valore del coefficiente di mutua induzione **M** il quale, come si è già visto, è legato ai valori delle induttanze proprie dei due circuiti: **M = k ☆ L1. L2** ,
essendo **k** quel numero minore o al più eguale a **1**, che costituisce il fattore di accoppiamento fra i due i circuiti.
Su questo argomento si tornerà successivamente.

CORRENTI PARASSITE O DI FOUCAULT

Si supponga di avere una barra massiccia immersa in un campo magnetico variabile nel tempo, dovuta ad esempio ad una corrente alternata sinusoidale;
si consideri un sottilissimo anello di questa barra, si veda la figura:

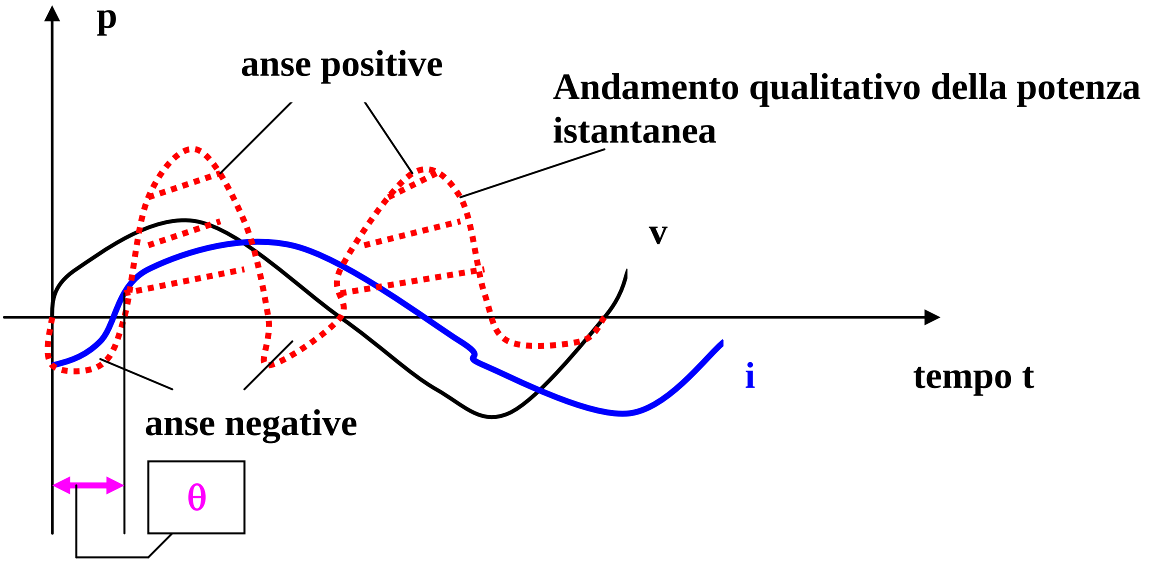


Poiché l'anello A abbraccia un certo flusso magnetico variabile, in esso si induce una certa f.e.m che, dato che il circuito è chiuso, fa circolare una corrente **i** nell'anello.
Tale corrente provoca delle perdite di potenza sotto forma di calore, per effetto JOULE, nel metallo della barra:
questa perdite prendono il nome di PERDITE per CORRENTI PARASSITE o di **FOUCAULT**.

La potenza dissipata si misura in WATT per unita di VOLUME.
Nelle macchine elettriche tutte le parti massicce di ferro, immerse in un campo magnetico variabile nel tempo sono soggette a questo tipo di perdite, per cui al fine di limitare il più possibile le perdite per correnti parassite, si tende a realizzare i circuiti magnetici come un insieme di tanti lamierini metallici, isolati l'uno rispetto all'altro.
Si è così abbandonata la realizzazione massiccia dei nuclei magnetici.
Con la realizzazione a sezioni laminare la RILUTTANZA del circuito magnetico rimane invariata.
Le lamiere magnetiche che vengono impiegate hanno uno spessore che è compreso in genere tra i 0,3 e 0,8 mm.
La perdita di potenza per unità di volume per correnti parassite nei nuclei lamellati si determina con la formula seguente: $\mathbf{Pf = k/\rho \; \delta^2 \; f^2 \; (BM)^2}$;
dove **k** è un coefficiente che tiene conto delle dimensioni delle lamiere, ρ è la resistività del materiale magnetico impiegato, δ è il suo spessore, **f** la sua frequenza e
BM l'induzione massima esistente nel circuito magnetico.
Si tenga presente che le perdite vanno misurate in Watt per ogni m^3, δ in mm, la frequenza in HERTZ e l'induzione in WEBER/m^2.
L'espressione precedente dimostra che la perdita per correnti parassite nei lamierini è proporzionale al quadrato dell'induzione massima, al quadrato della frequenza, ed al quadrato dello spessore del lamierino, mentre è inversamente proporzionale alla resistività del materiale impiegato per realizzare il circuito magnetico.
Ne risulta che se l'induzione e la frequenza devono assumere dei valori relativamente elevati, la perdita per correnti parassite non può essere contenuto nei dovuti limiti, se non impiegando lamiere sufficientemente sottili, oppure cercando di aumentarne la resistività ρ, senza tuttavia peggiorarne la qualità magnetiche, e quest'ultimo risultato lo si ottiene aggiungendo una piccola percentuale di silicio, compreso fra l'1% e il 3%.(Si riducono le perdite, per effetto delle correnti parassite, ad un terzo rispetto alle lamiere normali).

LA POTENZA NEI CIRCUITI A REGIME SINUSOIDALE

Nell'analisi dei **circuiti in corrente continua** la potenza assorbita risulta facilmente calcolabile mediante la LEGGE di JOULE: $P = RI^2$, dove R è la resistenza del circuito. E' altresì vero che l'aumento o la diminuzione della potenza è legato alle variazioni della resistenza. E' possibile calcolare la potenza anche attraverso la relazione: $P = VI$.
Nei confronti invece dei circuiti a **corrente alternata**, la determinazione della potenza assorbita implica un processo di calcolo più complesso; proprio perché la tensione e la corrente variano continuamente, perciò il prodotto **vi** risulta funzione del tempo e perciò esso definisce la **potenza istantanea p = vi**.
In generale però la tensione e la corrente possono, anche, essere sfasate fra loro di un certo angolo θ, per cui la potenza istantanea avrà un andamento nel tempo dipendente non solo dal modo di variazione di **v** ed **i**, ma anche dal loro angolo di sfasamento θ. Per vedere in concreto come può variare la potenza istantanea, ci riferiamo alla figura qui sotto riportata, che rappresenta l'andamento sinusoidale della tensione e della corrente, in un generico circuito che introduca tra queste due grandezze uno sfasamento θ. La potenza istantanea è facilmente deducibile moltiplicando punto per punto, per ogni valore di ascissa, (cioè del tempo), le due ordinate che si leggono rispettivamente sui grafici della **v** e della **i**.



Il grafico riportato rivela importanti caratteristiche della potenza istantanea:

1) l'andamento della potenza varia con la frequenza doppia di quella della tensione, ossia compie due cicli interi durante un solo ciclo della tensione e della corrente;

2) la curva della potenza ha alternanze positive e negative. Perciò, durante una parte del periodo, la potenza è negativa, il che va inteso nel senso che, in tale frazione di tempo, l'energia viene restituita al generatore. Da ciò è stato possibile effettuare le seguenti considerazioni:
se l'energia trasmessa al generatore al carico è positiva, il circuito ha una componente resistiva, in quanto in essa l'energia viene dissipata sotto forma di calore, e non può quindi essere restituita alla sorgente;
se detta energia ammonta a zero; ciò significa che il circuito contiene elementi reattivi puri;(i quali sono gli unici ad immagazzinare energia senza dissiparla), nei quali non viene dissipata alcuna potenza;
se l'energia viene trasmessa dal carico al generatore, il circuito contiene un suo proprio generatore, il quale eroga una potenza superiore a quella disponibile ai capi della sorgente, per cui questa ne assorbe.

POTENZA APPARENTE – POTENZA MEDIA.

Dalle considerazioni fino ad ora effettuate sulla potenza istantanea, si può dedurre che, in ogni circuito a corrente alternata contenente elementi reattivi, l'unica potenza effettivamente dissipata è quella assorbita dalla resistenza del circuito.
Un circuito reattivo tuttavia sembra consumare una grande quantità di potenza, perciò è importante osservare che, sebbene il generatore riceva in restituzione una parte di energia dal carico, esso deve fornire comunque una grande quantità di potenza.
Questa potenza che il generatore deve fornire,(indipendentemente dalla restituzione), è detta **POTENZA APPARENTE**, che per tutti i circuiti in corrente alternata si calcola dal prodotto del valore efficace della tensione per il valore efficace della corrente, ossia: **$Pa = V \cdot I$** = **$(Vm/\sqrt{2}) \cdot (Im/\sqrt{2}) = Vm \cdot Im/2$.**

Dalla potenza apparente si distingue la **POTENZA EFFETTIVA** consumata dal carico, che prende il nome di **POTENZA MEDIA o REALE**, e corrisponde all'energia assorbita dalla resistenza del circuito.
Essa viene anche definita, come la potenza assorbita, da un circuito in un ciclo della tensione di alimentazione.
Vediamo ora qual è l'espressione della potenza:
(abbiamo detto che essa si esprime come prodotto fra la resistenza del circuito ed il quadrato del valore efficace della corrente, ma nel caso alternato la corrente si può esprimere come rapporto fra il valore efficace della tensione e l'impedenza del circuito), **$P = RI^2 = R\ I\ (V/Z)$**.

Sapendo che il rapporto R/Z è uguale al **FATTORE di POTENZA** del circuito, cioè al coseno dell'angolo di sfasamento fra corrente e tensione, si ottiene così l'espressione della potenza media: **$P = V\ I\ \cos\theta$**, e tenendo conto che la potenza apparente è **$Pa = VI$**, si può scrivere:

$P = Pa \cos\theta$.

Spesso la potenza apparente Pa viene indicata con S, perciò potremo scrivere:

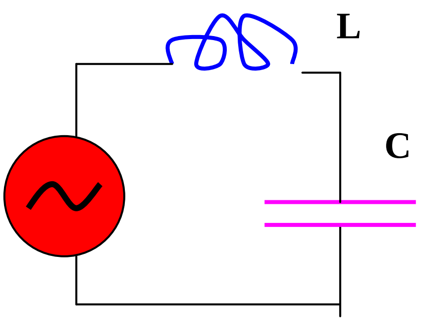
$P = S \cos\theta$

ed inoltre la P viene chiamata dalla letteratura tecnica **potenza attiva**.

Un accurato esame della formula precedente rileva che se l'angolo di fase θ **è di 90°** il suo coseno vale zero e conseguentemente, la sua potenza assorbita è nulla.
Perciò un angolo di fase di 90° definisce un circuito esclusivamente reattivo, in quanto restituisce tanta potenza per quanta ne riceve.
Se 'angolo di fase è di **0°**, il coseno è 1, ed il circuito è esclusivamente resistivo, in quanto assorbe tutta la potenza fornita dal generatore.
Si considerino i seguenti tre esempi, dove in ciascuno dei quali la tensione alternata applicata è dell'ordine dei 200 V.

Il circuito **A** comprende una reattanza induttiva di 100 Ω ed una reattanza capacitiva di 200 Ω.

A)

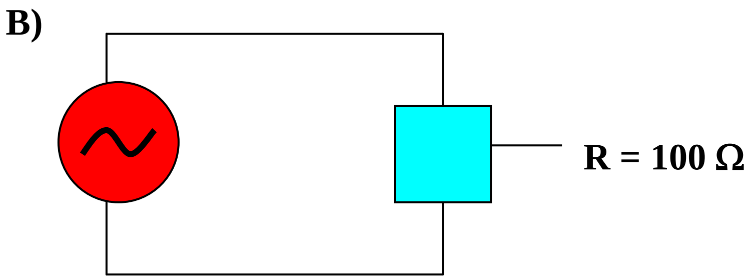


Dal momento che tali reattanze sono opposte, la reattanza effettiva risultante ammonta a 100 Ω, ed è capacitiva, e la corrente che scorre all'interno del circuito vale 2 A. La potenza apparente è pari a: $P_a = VI = 200 \cdot 2 = 400$ VA.
La potenza apparente si misura in VOLTAMPERE, e si abbrevia col simbolo VA, mentre come si sa la potenza media o reale o attiva si misura in WATT, (W).
L'angolo di fase del circuito **A** è di 90° e la corrente è in anticipo rispetto alla tensione. La potenza media è quindi:

$$P = VI\cos\theta = 200 \cdot 2 \cdot \cos 90° = 0 \text{ WATT.}$$

Ne consegue che non si ha dissipazione reale di potenza, pur dovendo il generatore fornire la potenza di 400 VA.

Il circuito **B** comprende solo una resistenza di 100 Ω, collegata ai capi del generatore.

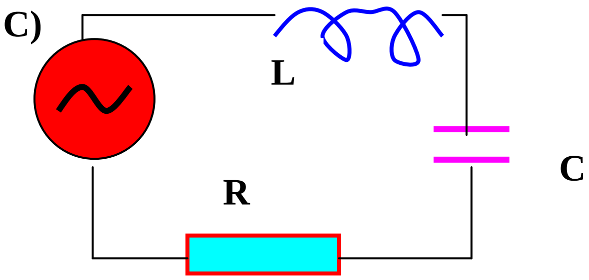


La corrente è ancora di 2 A, ma in questo caso essa è in fase con la tensione del generatore, per cui la potenza apparente è:

$$P_a = VI = 200 \cdot 2 = 400 \text{ VA,}$$

e la potenza media è, $P = VI\cos\theta = 200 \cdot 2 \cdot \cos 0° = 400$ W.
Quindi in questo caso la potenza apparente e quella attiva sono eguali. Il comportamento è quello di un circuito puramente resistivo in cui tutta la potenza fornita dal generatore viene dissipata nella resistenza R.

Il circuito **C** è invece misto, ossia comprende sia una reattanza capacitiva, sia una reattanza induttiva che una resistenza:



L'impedenza del circuito serie è data da: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} =$

$$Z = \sqrt{(100)^2 + (200)^2} = 224\ \Omega.$$

La corrente che scorre nel circuito è :

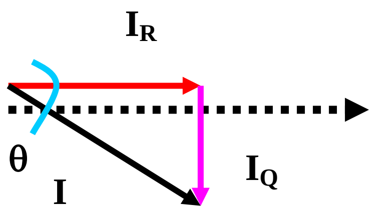
$$I = V/Z = 200 / 224 = 0{,}894 \text{ A.}$$

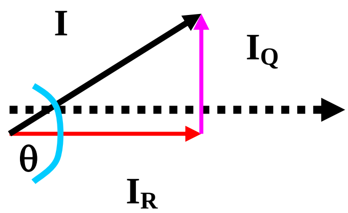
L'angolo di fase di questo circuito, eminentemente induttivo, può essere determinato mediante il suo coseno: $\cos\theta = R/Z = 100/224 = 0{,}446$ che equivale ad un angolo θ pari a 63,4°.
Allora la potenza attiva, cioè la potenza dissipata o consumata dalle resistenze, in questo circuito vale: $P = VI\cos\theta = 200 \cdot 0{,}894 \cdot 0{,}446 = 79{,}6$ W.
E' utile osservare che questa potenza può anche essere ricavata, conoscendo la corrente che percorre la resistenza, dal prodotto del valore di quest'ultima per il quadrato della corrente stessa. In definitiva scriveremo che:

$P = R\,I^2 = 100 \cdot (0{,}894)^2 = 79{,}6$ Watt.
La potenza apparente è data in questo caso da: $Pa = VI = 200 \cdot (0{,}894) = 179$ VA.

POTENZA REATTIVA

Nei circuiti che più comunemente si incontrano nella pratica, la corrente non è, in genere, né in fase e né in quadratura con la tensione, ma invece SFASATA di un certo angolo θ, in ritardo o in anticipo come si vede dai seguenti diagrammi:





NB. fra la I_R e la I vi è l'angolo di valore θ

In tal caso la corrente totale I può essere pensata come somma di due correnti sfasate fra loro di 90°, la prima IR, in fase con la tensione, la seconda IX in quadratura con essa. Quanto vale la componente IR? Tenendo conto di quanto detto nelle lezioni di trigonometria, si può scrivere: $IR = I\cos\theta$.
Quindi si vede facilmente che la potenza reale P assorbita da un circuito, si ottiene moltiplicando la tensione, ad esso applicata, per la componente della corrente totale del circuito che è in fase con la tensione:

$$\mathbf{P = V \cdot IR = VI\cos\theta.}$$

La potenza reale così definita rappresenta, come si è già indicato, la potenza elettrica media che fluisce effettivamente lungo il circuito trasformandosi in calore per effetto JOULE, od eventualmente in lavoro utile.
A questa trasmissione continua di energia dal generatore al carico utilizzatore, determinata dalla corrente **IR**, che spesso viene indicata col nome di CORRENTE ATTIVA, si sovrappone in più il processo di trasformazione interna corrispondente all'energia che viene alternativamente assorbita e restituita dal campo magnetico, nei circuiti induttivi, oppure dal campo elettrico, nei circuiti capacitivi.
Questo scambio alterno di energia, si produce per gli effetti reattivi interni al circuito senza alcun apporto di energia dall'esterno.
Ciò costituisce l'effetto caratteristico della componente IX della corrente totale, corrente che, essendo sfasata di 90° rispetto alla tensione, prende il nome di CORRENTE REATTIVA.
Il prodotto del valore efficace di questa corrente per la tensione efficace V definisce in corrispondenza **la potenza reattiva Q del circuito.**
Questa potenza si misura in VAR, abbreviazione della parola VOLTAMPERE REATTIVI, che risulta definita come:
$\mathbf{Q = V \cdot IX}$, dove essendo $\mathbf{IX = I\,sen\theta}$, si ha allora che la potenza reattiva assume la forma:

$$\mathbf{Q = V\,I\,sen\theta.}$$

La potenza reale P e la potenza reattiva Q di un circuito restano così determinate dalle relazioni generali:

$$\mathbf{P = V \cdot IR = V\,I\cos\theta,}$$
$$\mathbf{Q = V \cdot IX = V\,I\,sen\theta.}$$

Queste espressioni dimostrano che nei circuiti a corrente alternata le semplici indicazioni rilevate rispettivamente sul voltmetro e sull'amperometro , non possono fornire alcuna indicazione sull'effettiva entità di potenza messa in gioco nel circuito. Tali indicazioni possono stabilire solo che la potenza reale P sarà certamente MINORE o al più UGUALE al prodotto fra i due valori efficaci V ed I, e come abbiamo visto questo prodotto si chiama POTENZA APPARENTE ed è dato da

Pa = VI.

Questa espressione tuttavia non riveste alcun significato energetico, ma indica semplicemente quale potrebbe essere la potenza di un circuito qualora la corrente fosse in fase con la tensione, cioè con carico puramente resistivo.
Data la potenza apparente Pa, per ottenere la potenza reale P che effettivamente agisce nel circuito, si deve moltiplicare il valore Pa per il coseno dell'angolo di sfasamento θ fra tensione e corrente, cioè **$P = VI \cos\theta = Pa \cos\theta = S \cos\theta$.**
Per questo motivo al valore di **$\cos\theta$** si dà il nome di FATTORE di POTENZA del circuito. La potenza apparente, la potenza reale e la potenza reattiva sono legate fra loro da alcune relazioni che permettono facilmente, dalla conoscenza di due di esse o di una di esse ed il fattore di potenza, di ricavare l'altra potenza incognita, cioè:

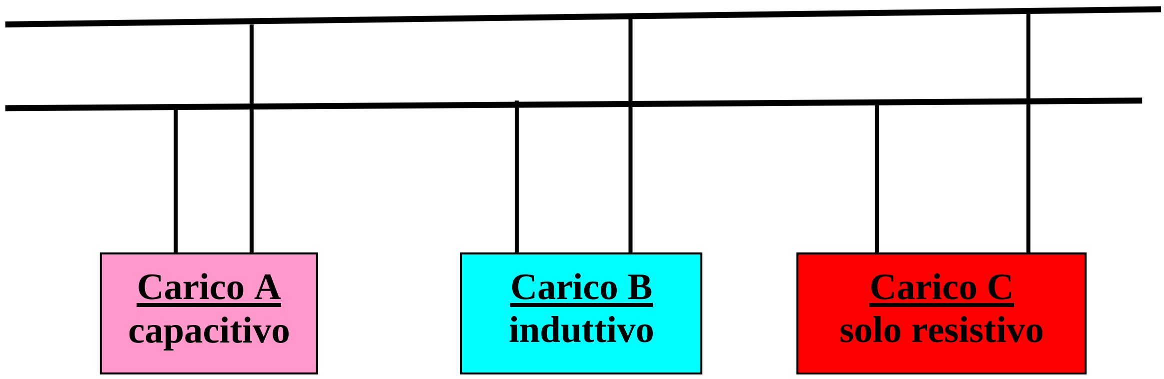
$$P = VI \cos \theta = Pa \cos\theta;$$
$$Q = V I \operatorname{sen} \theta = Pa \operatorname{sen}\theta = S \operatorname{sen}\theta = P \operatorname{Tg} \theta;$$

$$Pa = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \text{e ancora}$$

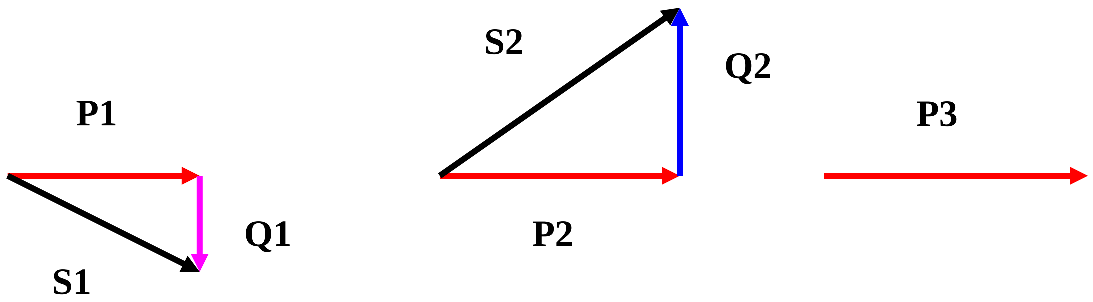
$$\cos\theta = P/ S = P / \sqrt{P^2 + Q^2},$$
$$\operatorname{sen}\theta = Q/ S , \quad \operatorname{Tg} \theta = Q/ P.$$

COMPOSIZIONE DELLE POTENZE NEI CIRCUITI COMPLESSI.

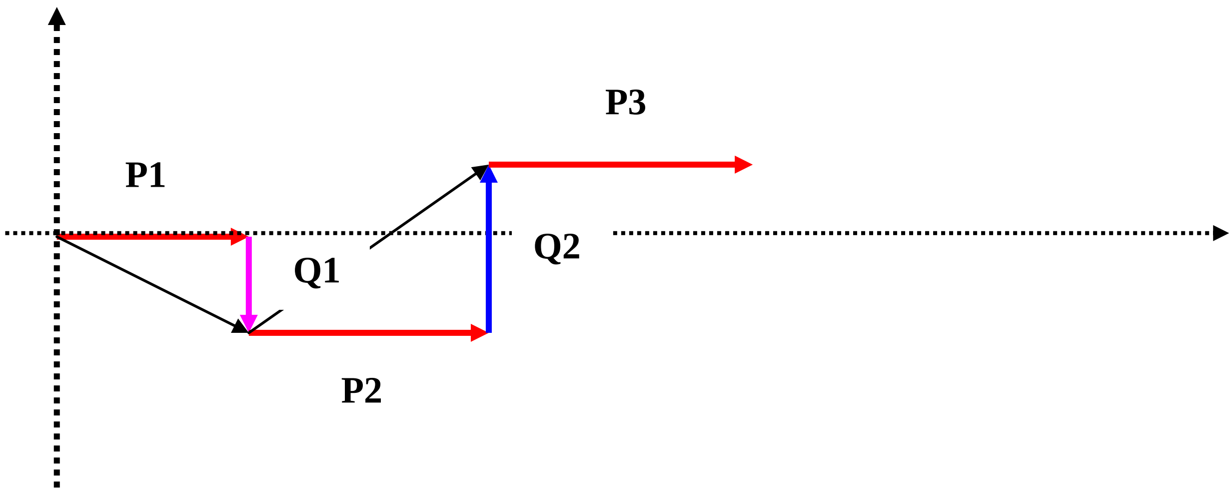
Anche per le potenze è possibile, date le relazioni che le legano, disegnare dei diagrammi a base di triangoli, tenendo presente però che, in questo caso i segmenti non sono vettori rotanti, ma semplicemente dei mezzi per aiutarci nei calcoli.
La potenza attiva viene generalmente considerata su un asse orizzontale, mentre la potenza reattiva viene disegnata perpendicolarmente ad essa, (in un senso o nell'altro a seconda che il segno sia positivo o negativo, cioè che la potenza reattiva sia generata dai condensatori o assorbita dalle induttanze).
In pratica allora la composizione delle potenze reali, reattive ed apparenti nei circuiti complessi si effettua semplicemente costruendo uno di seguito all'altro i triangoli delle potenze relativi ai singoli tratti del circuito.
Se supponiamo per esempio, che una stessa linea elettrica alimenti alcuni apparecchi utilizzatori, allacciati come in figura; ognuno di questi utilizzatori preleverà una certa potenza reale ed una certa potenza reattiva, così ogni carico è caratterizzato nel suo funzionamento da un determinato TRIANGOLO delle POTENZE.



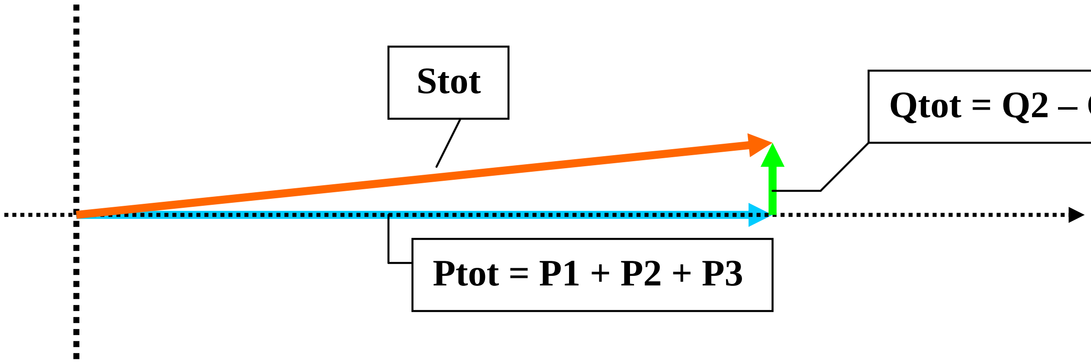
Considerando ad esempio un primo carico A leggermente CAPACITIVO, un secondo carico B fortemente INDUTTIVO ed un certo carico C puramente OHMICO, i triangoli delle potenze assumeranno l'aspetto indicato dalla figura:



La composizione delle potenze si effettua costruendo questi triangoli uno di seguito agli altri come si vede dal diagramma precedente: (il diagramma risultante di dice diagramma di **Boucherot**)



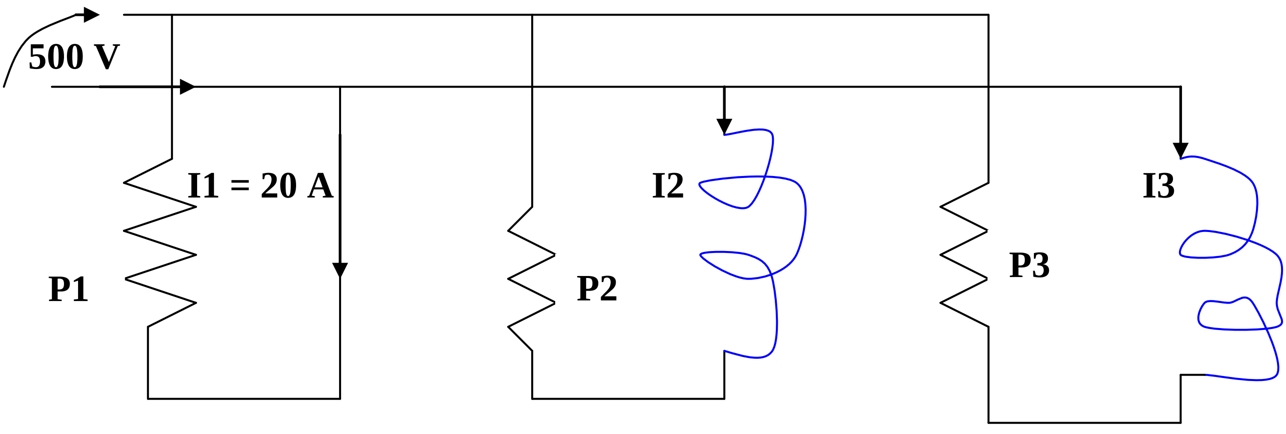
Il diagramma finale assume il seguente aspetto



In base al triangolo così definito resta anche determinato in particolare il FATTORE di POTENZA risultante in LINEA, cioè

cosθ = Ptot / Stot, con
Ptot = P1 + P2 + P3
Qtot = Q2 – Q1

Vediamo ora un esempio pratico che ci permette di utilizzare tutte le formule introdotte. Supponiamo di avere una linea elettrica monofase alla tensione di 500 V ed alla frequenza di 50 Hz, che alimenta i seguenti carichi: un carico ohmico che assorbe 20 A; un carico induttivo che assorbe una potenza reale di 50 KW con fattore di potenza 0,8; un altro carico induttivo che assorbe una potenza reale di 10 KW con fattore di potenza 0,2. Si deve determinare la corrente totale assorbita dalla linea ed il fattore di potenza globale.
Lo schema dell'impianto può essere rappresentato dalla figura seguente:



Per risolvere il problema si possono calcolare le correnti assorbite dai singoli carichi e costruire il diagramma totale delle correnti nel circuiti. Per il carico numero uno si può dire che il fattore di potenza è uguale ad uno, (dato che esso è puramente ohmico), e quindi lo sfasamento fra tensione e corrente è di 0°; per i carichi due e tre, poiché conosciamo la potenza reale assorbita o la sua potenza attiva ed il fattore di potenza, è possibile trovare la corrente, utilizzando la formula:

$$I = P / V \cos\theta$$

$$\mathbf{I2 = P2 / V \cos\theta 2 = 50 \cdot 10^3 / (500 \cdot 0{,}8) = 125\ A;}$$

$$\mathbf{I3 = P3 / V \cos\theta 3 = 10 \cdot 10^3 / (500 \cdot 0{,}2) = 100\ A.}$$

Impiegando la relazione: $\quad \mathrm{sen}\theta = \sqrt{1 - (\cos\theta)^2}$

possiamo determinare,

$$\mathbf{sen\theta 2 = 0{,}60}$$

$$\mathbf{sen\theta 3 = 0{,}98}$$

e da ciò si ha la possibilità di ricavare anche le potenze reattive Q2 e Q3

In questo caso si ottiene:

$$\mathbf{Q2 = V\ I2\ sen\theta 2 = 500 \cdot 125 \cdot 0{,}6 = 37{,}5\ kVAR;}$$

$$\mathbf{Q3 = V\ I3\ sen\theta 3 = 500 \cdot 100 \cdot 0{,}98 = 49\ kVAR.}$$

La potenza attiva assorbita dal primo carico vale dunque:

P1 = V I1 cosθ = VI1 = S1, poiché il carico è puramente resistivo, in poche parole sarà allora, **P1 = 500 . 20 = 10 000 W = 10 kW**.

La potenza totalmente assorbita dal sistema di carichi è:

$$\mathbf{P} = P1 + P2 + P3 = (10 + 50 + 10)\ kW = \mathbf{70\ kW};$$

mentre la potenza reattiva totale vale, $\mathbf{Q} = \cancel{Q1} + Q2 + Q3 = 37{,}5 + 49 = \mathbf{86{,}5\ kVAR}$.

La potenza apparente S si ottiene applicando la relazione nota:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{70^2 + (86{,}5)^2} = \mathbf{111\ kVA}.$$

Dalla conoscenza della potenza apparente e della potenza attiva totale, si ricava il fattore di potenza totale o meglio dell'intero complesso di carichi, cioè:

$$\mathbf{\cos\theta = P / S = 70 / 111 = 0{,}63}.$$

Infine, la corrente assorbita dall'intero complesso è data come:

$$\mathbf{I = P / V \cos\theta = 70 \cdot 10^3 / 500 \cdot 0{,}63 = 222\ A.}$$

Naturalmente la potenza reattiva di cui si è parlato in questo esempio è induttiva, poiché il circuito è privo di capacità. Nel caso ci fossero state delle capacità o meglio dei condensatori, nel circuito, le relative potenze dovevano essere sottratte alle potenze reattive induttive, perché, come abbiamo visto, mentre le induttanze assorbono potenza reattiva le capacità ne forniscono e viceversa in tempi diversi.

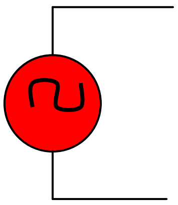
SISTEMI POLIFASI IN GENERALE

Col nome di sistema polifase viene indicato un insieme di due o più circuiti elettrici , nei quali agiscono altrettante f.e.m di uguale frequenza, ma aventi l'una rispetto all'altra degli sfasamenti prestabiliti. Ognuno di questi circuiti costituisce una fase del sistema. In certi casi le singole fasi si mantengono distinte l'una dall'altra e nel loro complesso costituiscono un SISTEMA POLIFASE a circuiti indipendenti.

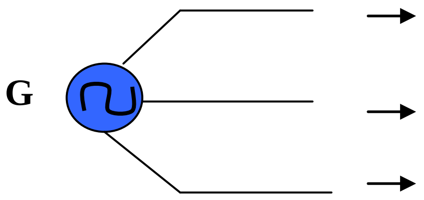
In generale un sistema a più fasi si dice SIMMETRICO se le f.e.m agenti su ciascuna fase sono tutte uguali in valore e sono sfasate ordinatamente l'una rispetto all'altra di una frazione di periodo pari al numero delle fasi. Ad esempio un **sistema trifase simmetrico** si compone di tre circuiti distinti nei quali agiscono rispettivamente tre f.e.m, E1, E2, E3 uguali in valore, ma ciclicamente sfasate fra loro di un terzo di periodo, ossia 120°.

<u>COLLEGAMENTI CARATTERISTICI DEL SISTEMA TRIFASE</u>

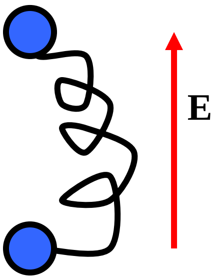
A noi interessa ricordare che esistono delle macchine elettriche, chiamate **alternatori** o **generatori sincroni** che hanno la possibilità di generare sia correnti monofasi sia con opportuni artifici, correnti trifasi.
Un generatore **<u>monofase</u>** viene schematizzato generalmente come in figura:



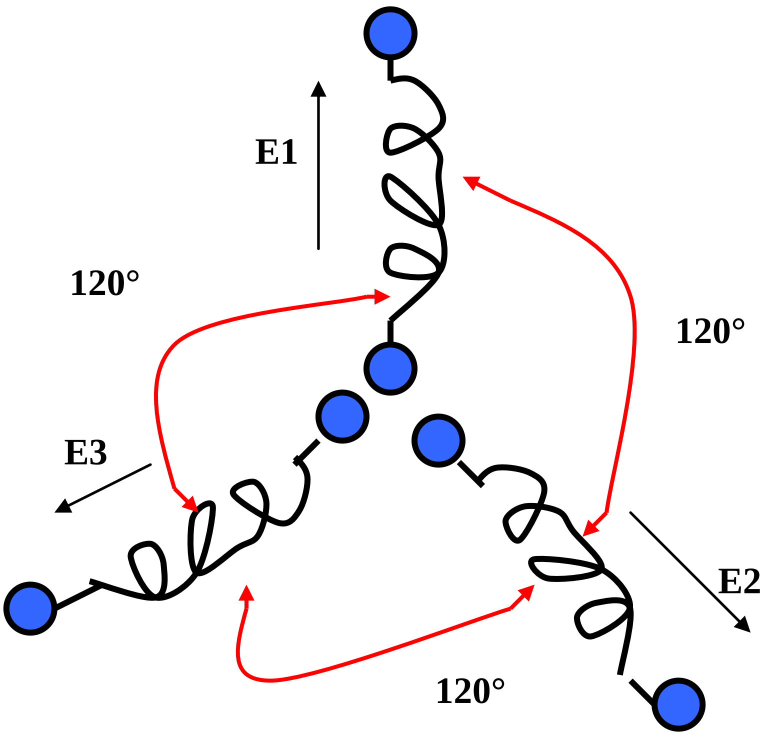
mentre il generatore **<u>trifase</u>** è schematizzato così:



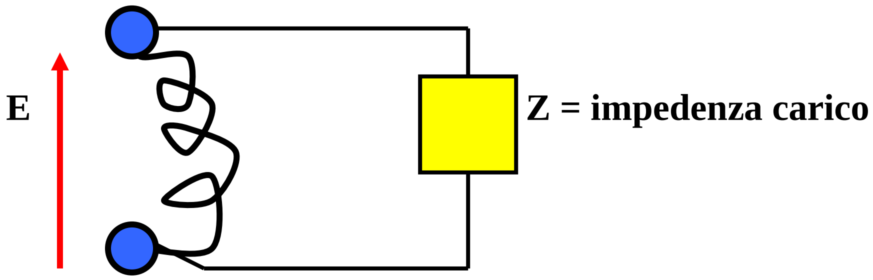
Come si vede dalla figura, il SISTEMA TRIFASE, è caratterizzato dal fatto fondamentale di avere tre fili per il trasporto della corrente.
Una fase del sistema trifase si può anche rappresentare nel modo seguente:



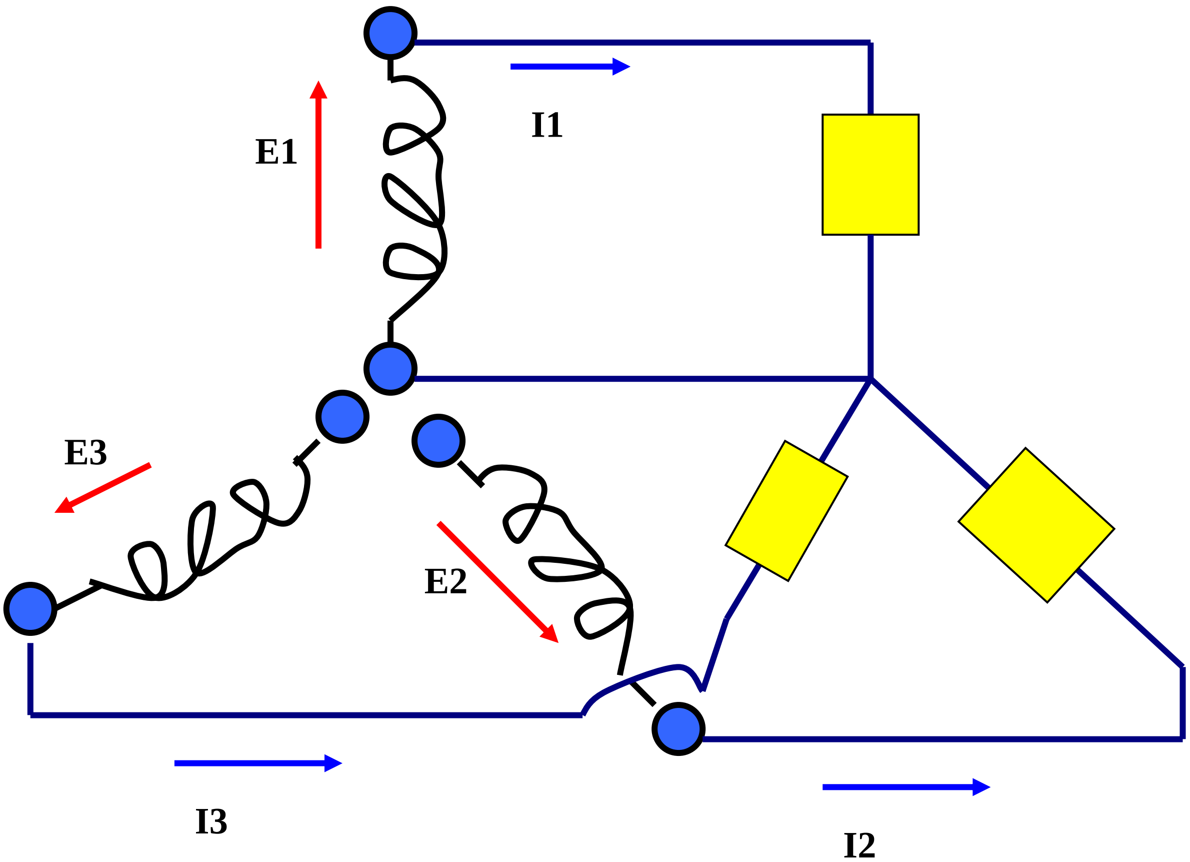
Mentre un sistema trifase può essere schematizzato nel modo seguente:



E’ logico pensare di collegare ciascuna fase, tramite due fili conduttori , con un certo carico utilizzatore, come se ciascuna fase fosse in realtà un semplice circuito monofase, vedi la figura sotto riportata:

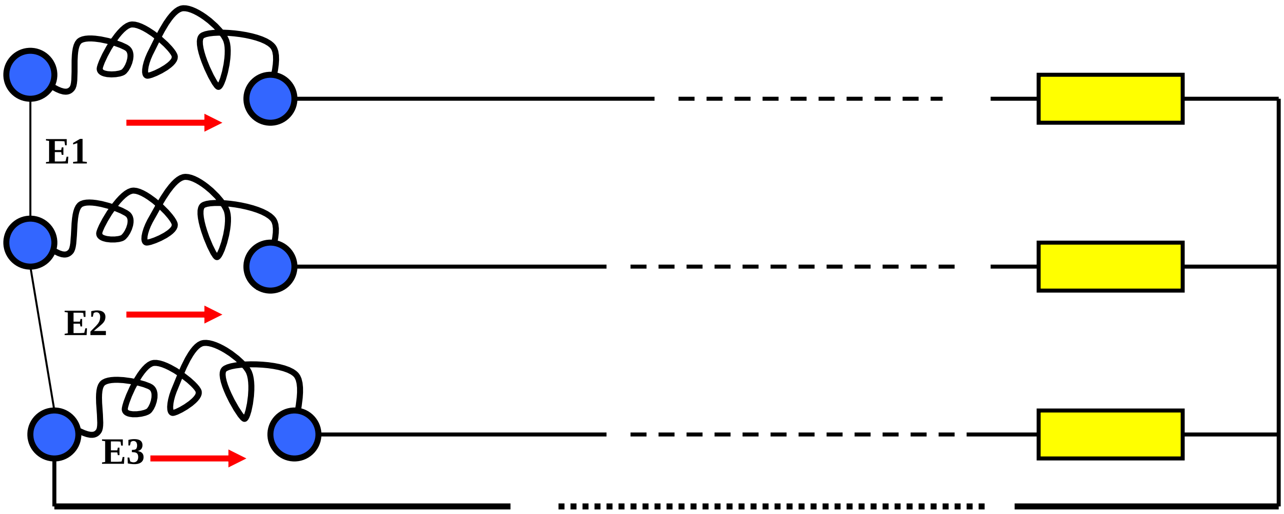


Nel figura qui sotto si è pensato di collegare ciascuna fase con un certo carico utilizzatore di impedenza Z, (che si è supposto uguale per tutte le tre fasi).

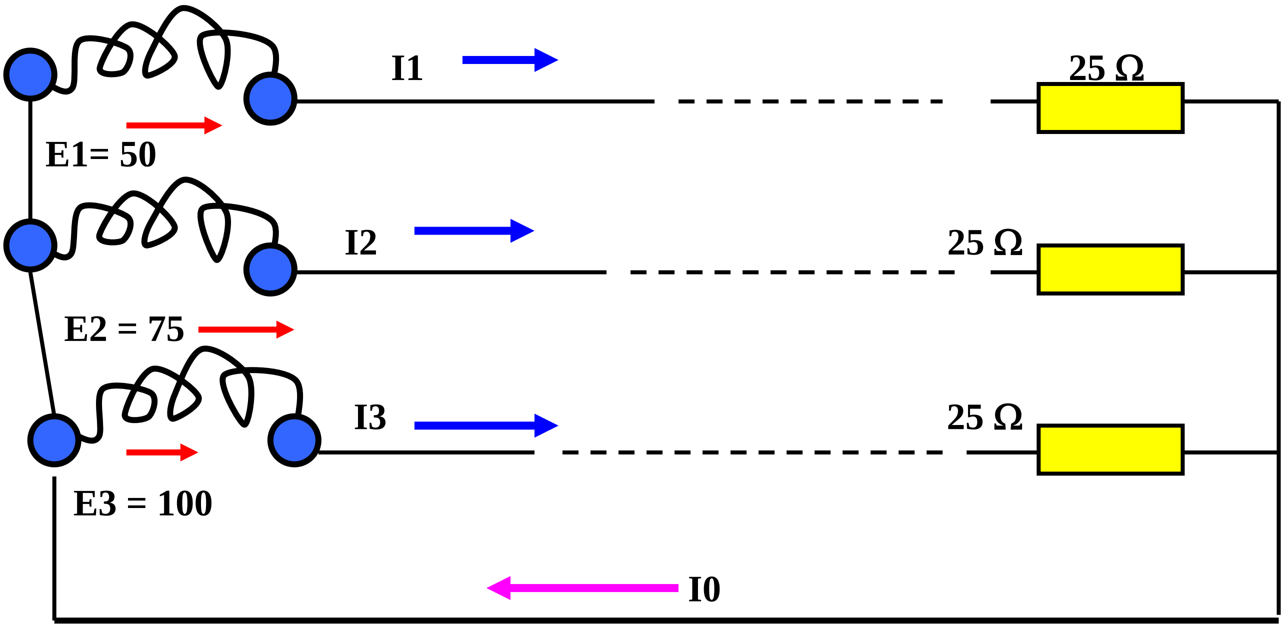


Questo collegamento si dice collegamento a STELLA. Esso presenta, ma non si vede, il filo di ritorno delle correnti, detto FILO NEUTRO.
Naturalmente, per calcolare la corrente o qualche altro elemento incognito del sistema è sufficiente considerare separatamente ciascun circuito di ogni fase ed eventualmente poi calcolare la corrente I0 nel filo NEUTRO.
Nel caso da noi considerato l’impedenza del carico è uguale nelle tre fasi, ma essa, con l’ipotesi dell’esistenza del filo NEUTRO, può anche essere diversa per ciascuna fase, come possono essere diverse anche le f.e.m E1, E2, E3.

Il circuito a stella può essere rappresentato anche nella forma seguente:



Vediamo ora un esempio di quanto è stato detto: supponiamo di avere tre f.e.m di valore efficace E1 = 50 V, E2 = 75 V, E3 = 100 V, sfasate fra loro di 120°, che alimentano un carico trifase simmetrico di impedenza induttiva Z = 25Ω. Sapendo che vi è il filo neutro che congiunge i due CENTRI STELLA del sistema , quale è la corrente che percorre le tre fasi?
Il circuito in esame è riportato nella seguente figura:
Il circuito a stella può essere rappresentato anche nella forma seguente:



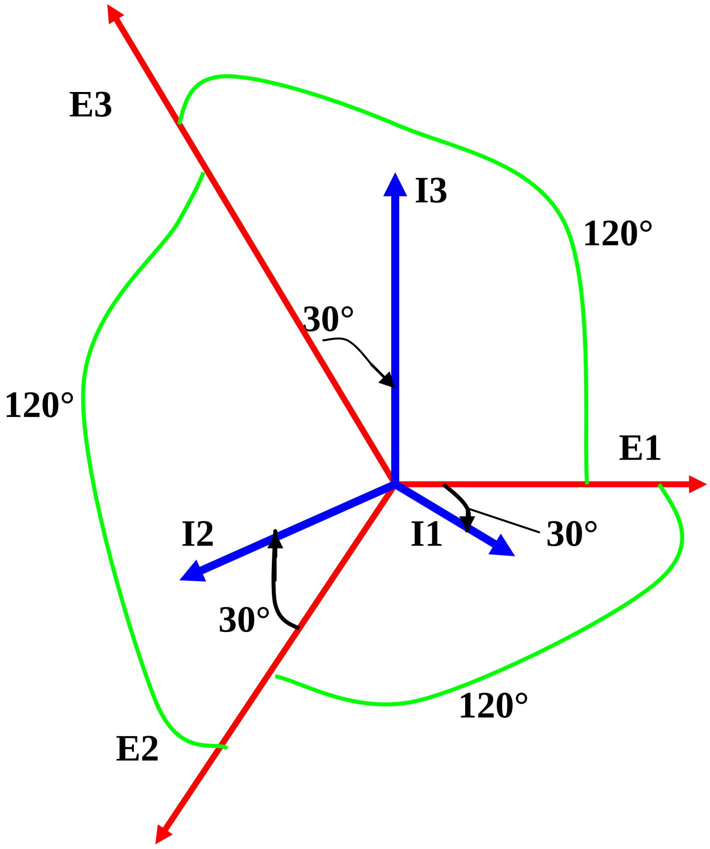
Come si è detto ciascuna fase può essere considerata separatamente, per cui si avrà:

nella fase 1- **I1 = E1 / Z = 50 / 25 = 2 A;**

nella fase 2- **I2 = E2 / Z = 75 / 25 = 3 A;**

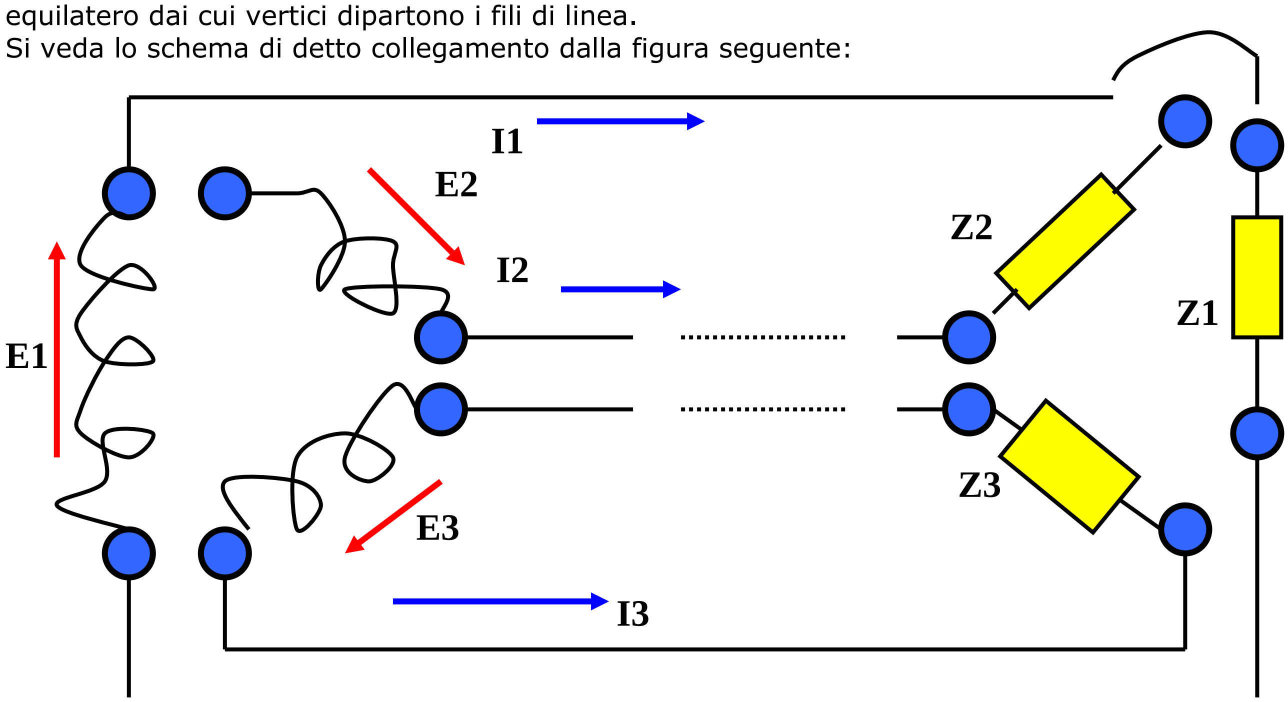
nella fase 3- **I3 = E3 / Z = 100 / 25 = 4 A.**

Tanto per esempio potremo supporre di conoscere il fattore di potenza del sistema, sia esso: **cosθ = 0,866**, il che equivale a dire che la corrente è in ritardo, (perché il carico è induttivo), sulla corrispondente tensione di un angolo uguale a θ **= 30°.**
Possiamo tracciare un diagramma vettoriale qualitativo del nostro sistema trifase.
Si veda nella pagina successiva.

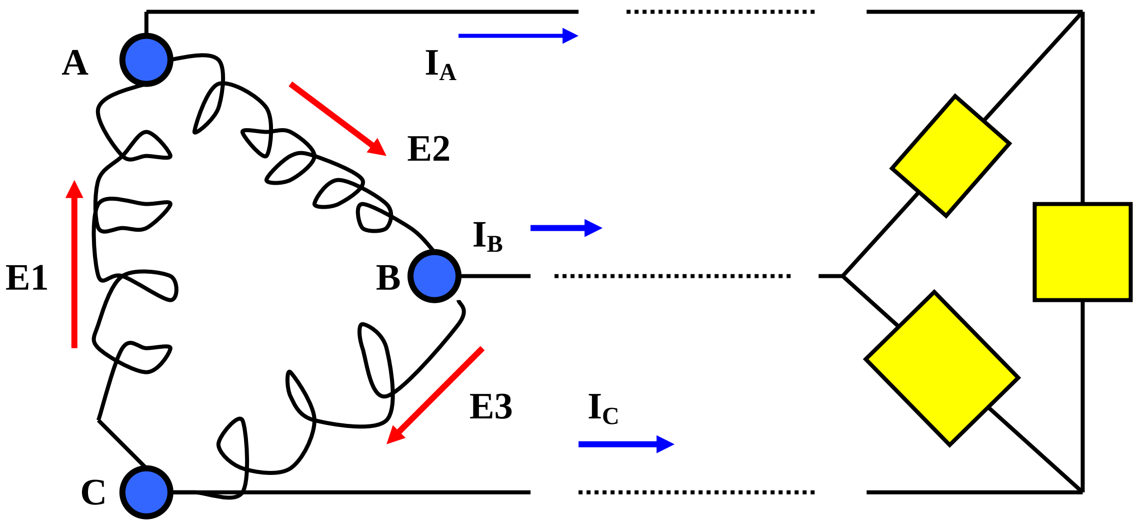


SISTEMA TRIFASI A TRIANGOLO

Le tre fasi di un sistema trifase non sono soltanto collegabili a stella, come abbiamo visto, ma anche a TRIANGOLO, che consiste nel collegare il principio della prima fase con la fine della seconda, il principio della seconda con la fine della terza fase, e l'inizio di quest'ultima con la fine della prima fase. In questo modo si viene a formare un triangolo equilatero dai cui vertici dipartono i fili di linea.
Si veda lo schema di detto collegamento dalla figura seguente:



Oppure lo schema può essere il seguente:



Il filo di linea relativo al vertice A funziona contemporaneamente come filo di andata per la corrente I1 e come filo di ritorno della corrente I2:
su questo filo si ha pertanto una corrente risultante IA= I1 – I2, pari cioè alla differenza vettoriale fra le due correnti I1 e I2.
Analogamente funzionano gli altri due fili.

Nelle notazioni simboliche il collegamento a stella viene indicato con **Y**, mentre quello a triangolo con il simbolo Δ.

Vediamo ora di stabilire alcune relazioni fondamentali esistenti per le tensioni e le correnti, fra i due tipi di collegamento, ossia per il collegamento a STELLA e a TRIANGOLO.
Ci riferiamo per semplicità ai due schemi indicati con 1A ed 1B:

Fig. 1A

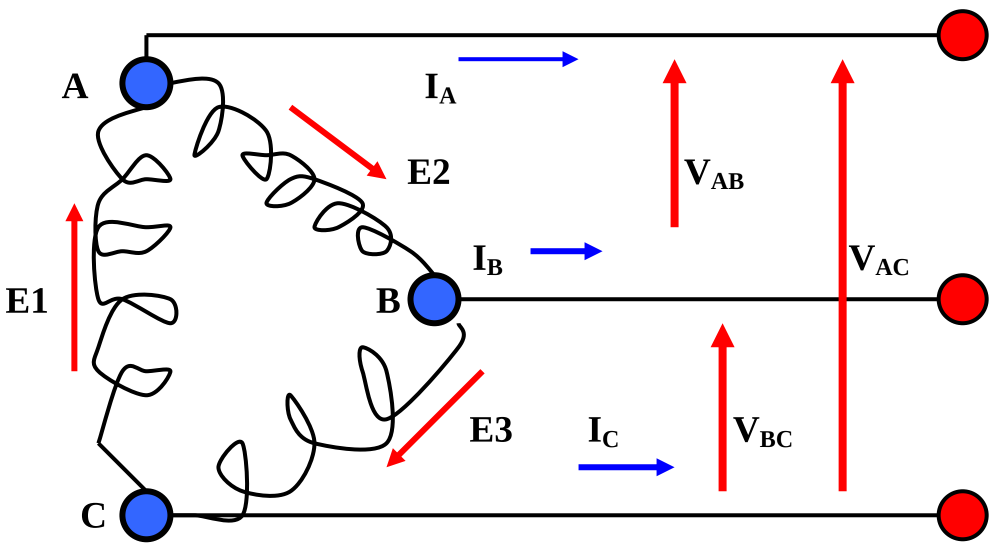
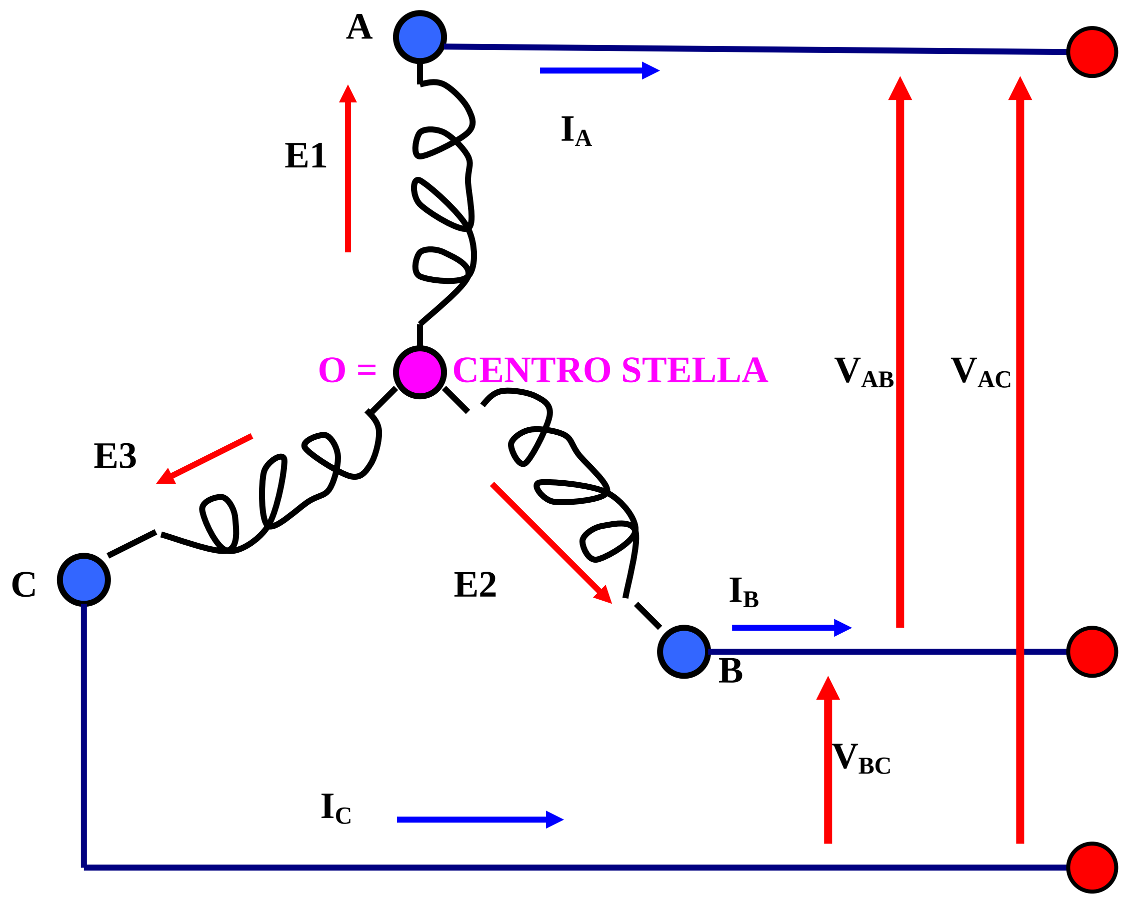
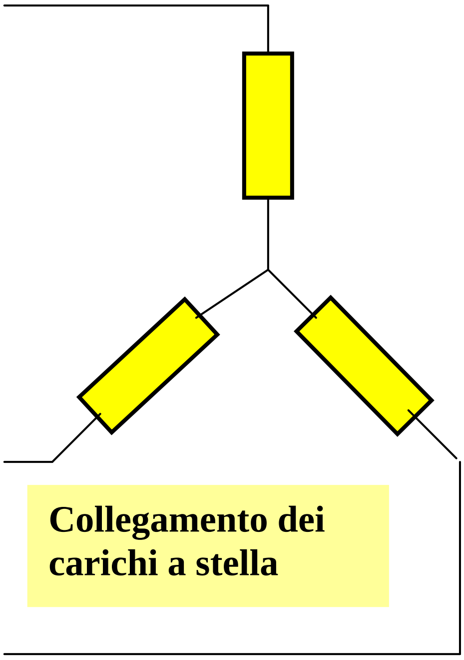


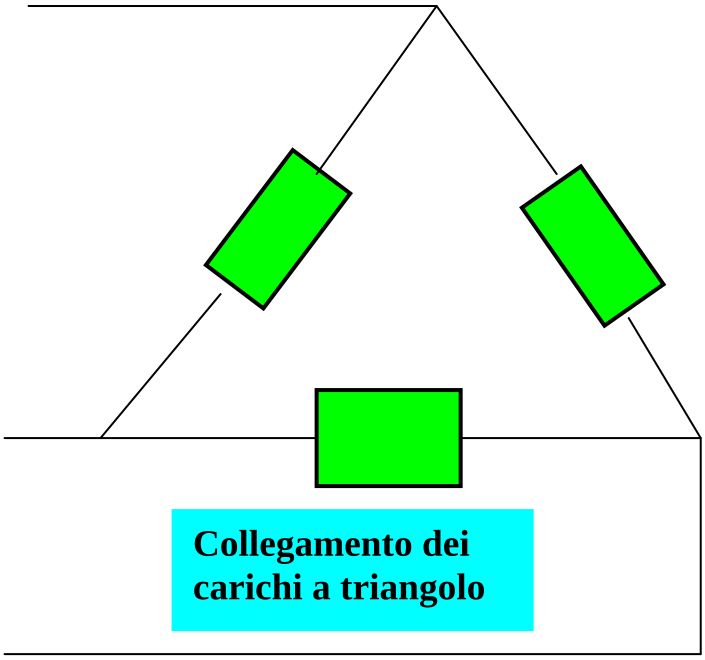
Fig. 1B



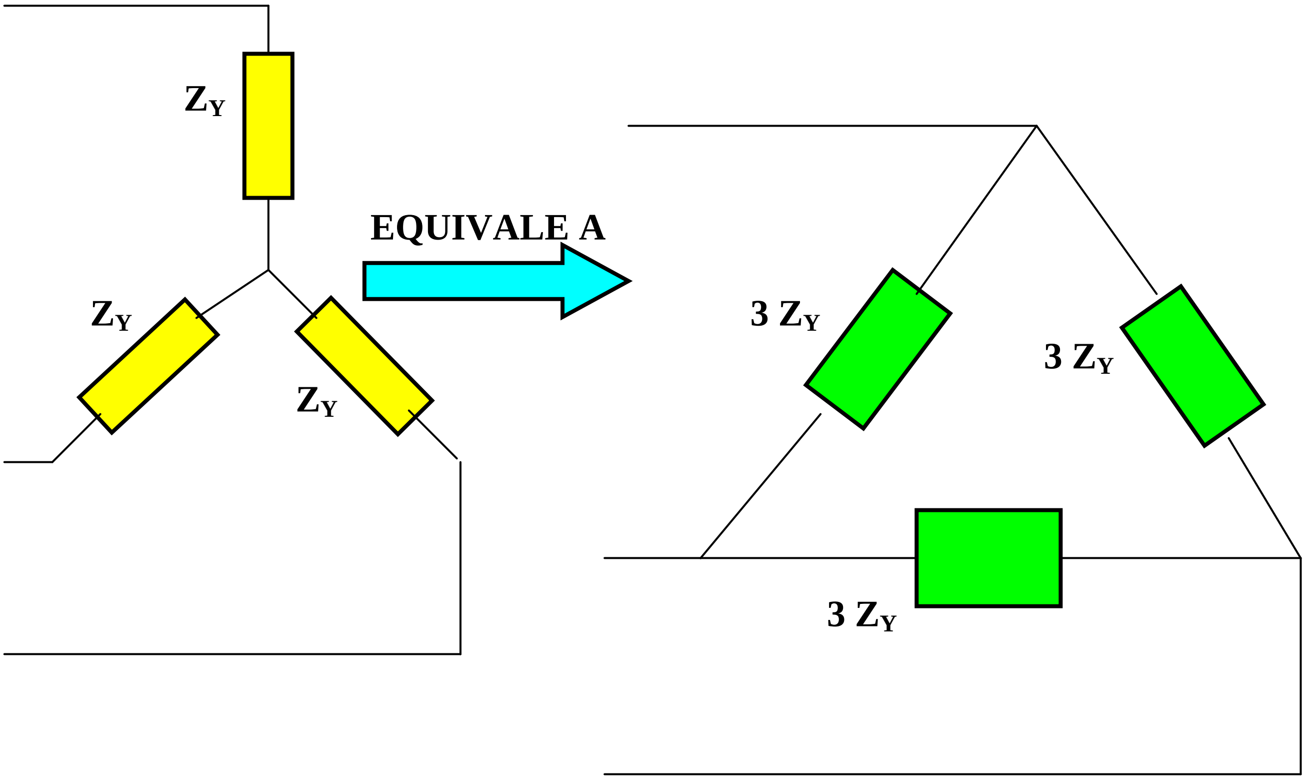
Consideriamo il sistema di figura **1A**: esso è un **sistema trifase a TRIANGOLO**.
Le tensioni esistente fra i punti AB, BC, e CA vengono chiamate **TENSIONE CONCATENATE** e sono quelle che normalmente troviamo fra i tre fili che viaggiano sospesi ai pali elettrici nelle nostre campagne. Queste tensioni sono uguali fra loro, anche se sfasate di 120° l'una rispetto dall'altra. Le correnti **I A**, **I B** e **I C** vengono dette **correnti di linea**, mentre quelle che circolano nel triangolo ABC vengono dette **correnti di fase**. Orbene, fra le correnti di linea e quelle di fase esiste una importantissima relazione: **I = ☆ 3 j** , avendo indicato con **I** una corrente generica di linea e con **J** una corrente generica di fase. Se il carico è simmetrico, cioè costituito da tre impedenze tutte uguali, sia le tre correnti di linea che le tre correnti di fase sono **uguali**, anche se sfasate di 120° l'una dall'altra.
Riferendoci ora alla figura 1B, si vede che la corrente di linea percorre anche la fase corrispondente, per cui si ha che **I = J.**
L'uguaglianza non si ha però fra la tensione **concatenata** e la tensione **stellata**, cioè fra la tensione esistente fra i punti A, B, C ed il centro stella O.
In questo caso infatti, indicando con la lettera **E** la generica tensione stellata, esiste la relazione: **V = ☆ 3 E,** cioè la tensione concatenata è uguale a **☆ 3** la **tensione stellata o di fase.**

Le stesse relazioni fra le correnti di linea e di fase e le tensioni stellate o di fase e concatenate esistono naturalmente anche nei carichi trifasi, che possono essere collegati sia a stella che a triangolo, (si veda la figura di riferimento):





A questo proposito esistono delle formule che permettono di considerare un carico collegato a stella come un carico a triangolo e viceversa. In poche parole ci consentono di passare da una configurazione ad un'altra.
In questo modo si può, nell'ipotesi che il carico sia simmetrico, considerarlo sia come una stella , sia come un triangolo, a seconda delle nostre esigenze di calcolo.
Si vedano le figure seguenti:

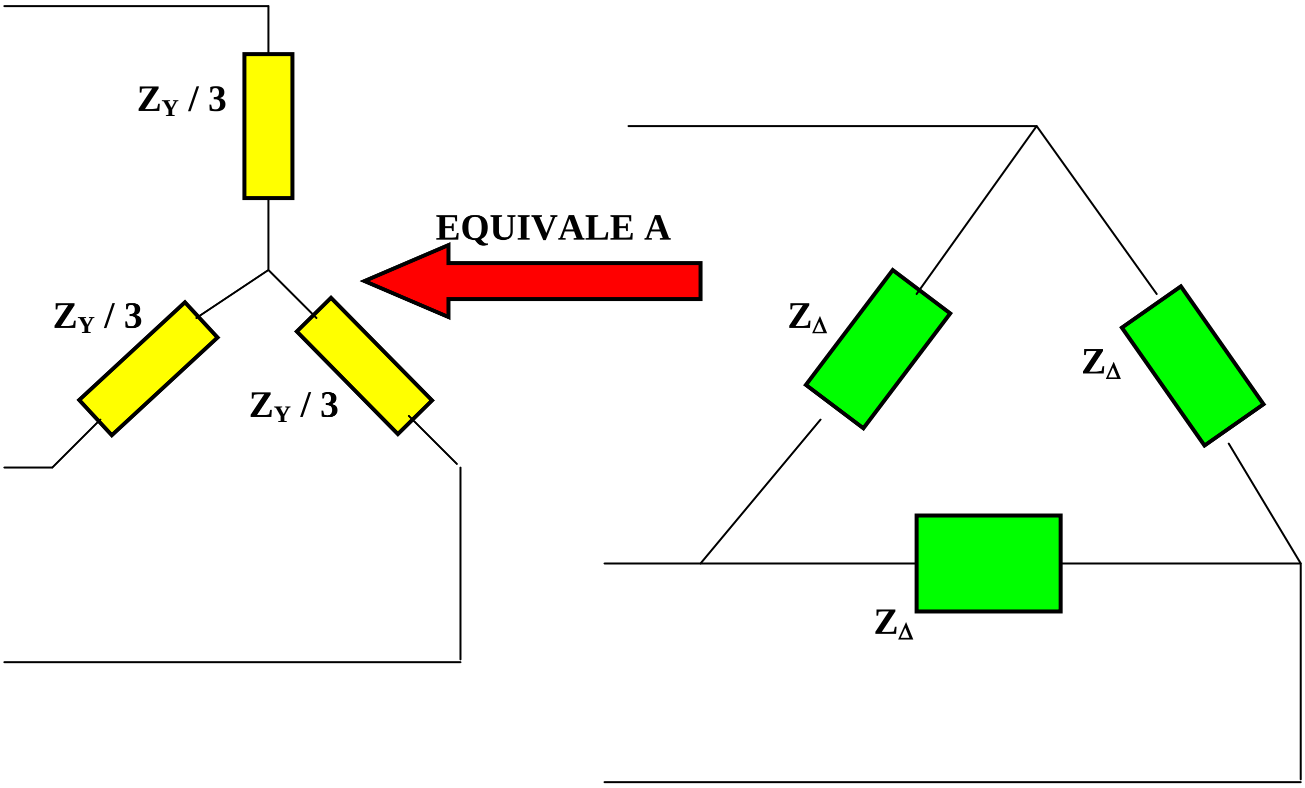


Nella stella riportata nella figura nulla cambia delle tensioni e delle correnti di linea se al suo posto sostituisco il **triangolo che ha per impedenze**:

$$Z_\Delta = 3\ Z_y.$$

Analogamente nel triangolo riportato nella figura, qui sotto riportata nulla cambia delle tensioni e delle correnti di linea se al suo posto sostituisco la **stella che ha per impedenze**:

$$Z_y = Z_\Delta / 3.$$



Per concludere si può dire che, se le tre impedenze del carico sono uguali, anche le tre impedenze del circuito equivalente sono uguali.

Lo stesso rapporto va esteso, si intende tanto alle resistenze che alle reattanze, ponendo, rispettivamente:

$$R_\Delta = 3\ R_Y; \quad X_\Delta = 3\ X_Y;$$

oppure $R_Y = R_\Delta / 3; \quad X_Y = X_\Delta / 3.$

OSSERVAZIONI SUI CIRCUITI TRIFASI

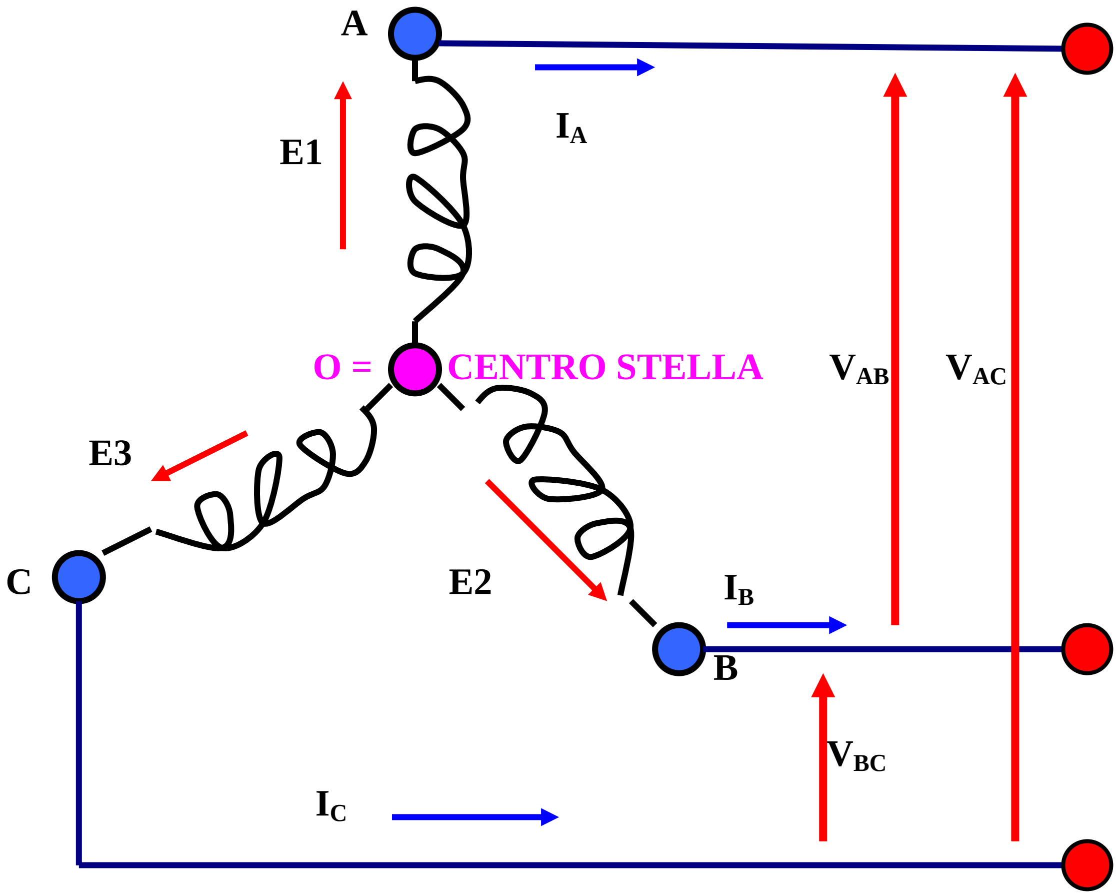
Il sistema trifase rappresenta, salvo casi ed applicazioni speciali, la base fondamentale su cui è organizzata la PRODUZIONE INDUSTRIALE dell'energia elettrica e tutta l'ORGANIZZAZIONE per la trasmissione a distanza e la distribuzione dell'energia agli utenti stessi.
L'utilizzazione di questa energia può compiersi, invece, o con motori ed apparecchi trifasi veri e propri e cioè costituiti per essere alimentati direttamente da una linea trifase, oppure anche con motori o apparecchi monofasi.
In generale l'utilizzazione dell'energia elettrica per forza motrice ad uso industriale si compie quasi esclusivamente con motori trifasi, i quali sono dotati , come gli alternatori trifasi, di tre avvolgimenti identici e simmetrici, connessi fra loro a stella o a triangolo a seconda delle esigenze specifiche di applicazione.
L'impiego dei motori monofasi è invece limitato alle piccole potenze, richieste specialmente negli usi domestici, come in molti casi di trazione elettrica.
Inoltre si può dire che, i tre circuiti interni delle macchine elettriche trifasi, o apparecchi trifasi di ogni specie, sono alimentati ai loro capi da tre tensioni uguali in valore, ma sfasate di 120°, ed assorbono tre correnti uguali in valore ed egualmente sfasate. Tutto ciò si esprime dicendo che tutti gli apparecchi trifasi, salvo eventuali fenomeni di perturbazione, costituiscono rispetto alla linea trifase di alimentazione dei carichi equilibrati e simmetrici. Tutte le macchine che realizzano questa condizione possono essere indifferentemente collegate a stella o a triangolo, ovviamente all'atto della costruzione della macchina è necessario prestabilire il tipo di collegamento, in relazione alle caratteristiche di tensione e di corrente che si vogliono conseguire.

LA POTENZA ELETTRICA NEI SISTEMI TRIFASI

In un sistema trifase la **potenza istantanea** complessiva **p** corrisponde in ogni caso alla somma algebrica delle potenze istantanee relativa alle singole fasi.
Indicando perciò con v1,v2, v3 i valori istantanei delle tensioni misurate ai capi delle singole fasi e con i1, i2, i3 i valori istantanei delle correnti rispettive, si ha che:

$$\mathbf{p = v1i1 + v2i2 + v3i3.}$$

La potenza risultante di un qualsiasi sistema polifase è che <u>la potenza risultante è assolutamente costante.</u>
Nei sistemi trifasi simmetrici ed equilibrati tutte le tensioni e la correnti nelle singole fasi sono uguali in valore ed equamente sfasate, in modo tale che tutte le fasi utilizzatrici abbiano uguale potenza reale, uguale potenza apparente ed uguale potenza reattiva. Con riferimento alla figura sotto riportata, la potenza reale, apparente e reattiva complessiva del sistema si può ottenere moltiplicando per tre quelle relative a ciascuna fase:



Potenza reale o attiva = **P = 3 E I cos**θ
Potenza reattiva = **Q = 3 E I sen**θ
Potenza apparente = **S = A = PA = 3 E I.**

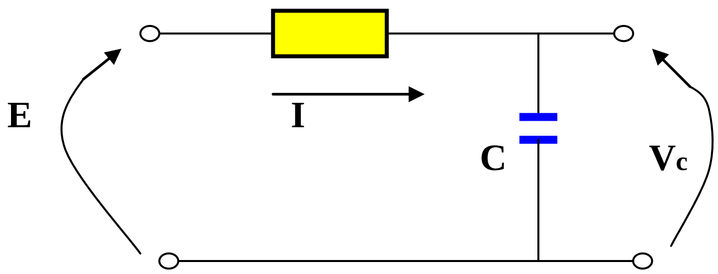
Ricordando la relazione che lega la tensione stellata E alla concatenata V, cioè
V = ☆ 3 E, si può anche scrivere:

Risulta infine che: $\mathbf{S = A = P_A = \sqrt{P^2 + Q^2}}$; $\mathbf{\cos\theta = P / S}$; $\mathbf{Q = P\ Tg\ \theta}$,

essendo **cos**θ, il fattore di potenza del sistema.

I FILTRI

Consideriamo il seguente circuito, al quale è applicata una tensione E sinusoidale:



La corrente, in forma complessa, che circola nel circuito risulta uguale a:

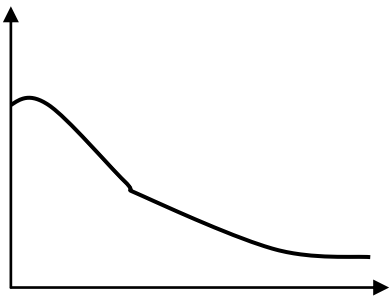
$$\mathbf{I} = \mathbf{E} / (R + 1/j\omega C),$$

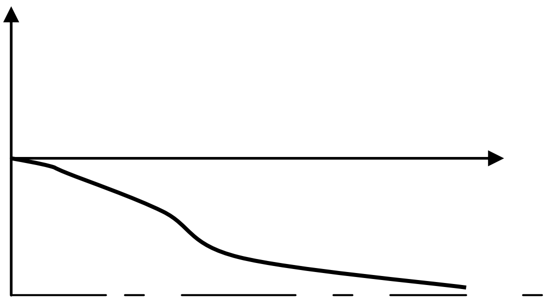
mentre la tensione ai capi del condensatore C è:

$$\mathbf{V_c} = \mathbf{I} \,.\, (1/j\omega C) = (\mathbf{E} / (R + 1/j\omega C)) \,.\, (1/j\omega C)=$$
$$= \mathbf{E} / (1 + j\omega RC).$$

Il modulo di **Vc** risulta: $V_c = E / \sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}$ e l'argomento, che misura lo sfasamento fra la tensione ai capi del condensatore e quella applicata al circuito, è $\varphi = -\arctan g\ \omega R C$. Dalle relazioni che definiscono, Vc e φ, si osserva che, per **piccoli valori della ω, Vc = E** e **φ = 0°**; man mano che i valori crescono la ω aumenta, **diminuisce il valore della** Vc, mentre **aumenta lo sfasamento φ** .

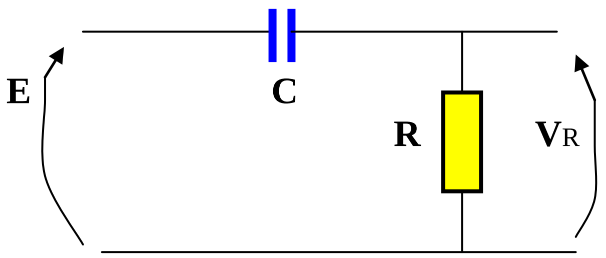
Gli andamenti di **Vc** e di φ in funzione della ω sono illustrati nella figure seguenti:





Questo circuito è detto **PASSA BASSO**, perché lascia passare solo segnali a bassa frequenza ed attenua quelli ad alta frequenza.

Consideriamo, invece, il seguente circuito:



La corrente che circola nel circuito, in forma complessa, risulta:

$$\mathbf{I} = \mathbf{E}\ 1/\ (R + 1/\ j\omega C),$$

mentre la tensione ai capi della resistenza R è data da:

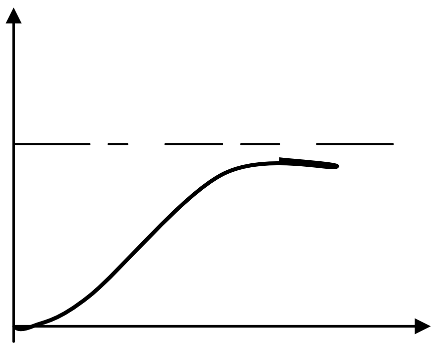
$$\mathbf{V}_R = R\,\mathbf{I} = \mathbf{E}\ R/\ (R + 1/\ j\omega C) = E\ (\ j\omega RC\ )\ /\ 1 + j\omega RC.$$

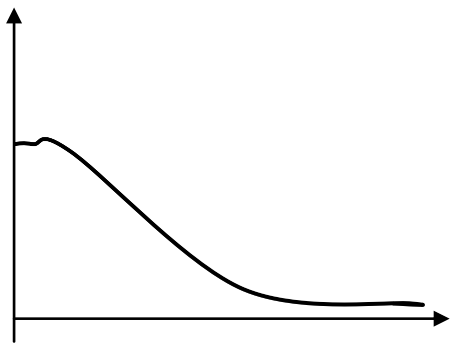
Il modulo di V_R è il seguente: $E\ (\ \omega RC\ )\ /\sqrt{1 + \ \omega^2 R^2 C^2}$, mentre lo sfasamento è $\varphi = 90° - \text{arctang}\ \omega\ R\ C$.

Dalla relazione che esprime **V**R si osserva che essa è funzione di ω e che tende a **zero quando ω è piccola, mentre tende al valore E per valori di più elevati.**

Lo sfasamento φ per valori di ω **molto piccoli è prossimo a 90°, mentre tende a zero per valori molto grandi di ω.**

Gli andamenti di VR e di φ sono riportati nelle figure successive:





IL RIFASAMENTO

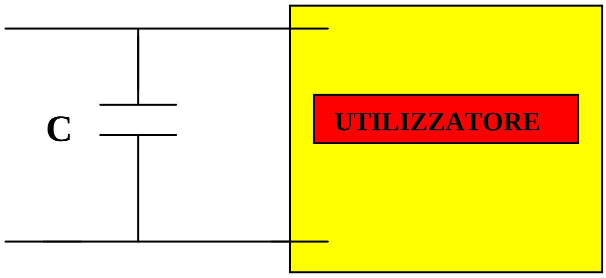
Si consideri un motore in corrente alternata, esso per potere funzionare necessita sia della corrente attiva Ia che della corrente reattiva Ir.

Infatti, la corrente Ia produce la COPPIA MOTRICE e Ir produce il CAMPO MAGNETICO ROTANTE. Proprio per questo, il motore, per potere funzionare assorbe dalla RETE ELETTRICA ENEL, sia potenza **ATTIVA** che **REATTIVA**.

Il carico da noi considerato, nell'esempio, è un carico OHMICO – INDUTTIVO, e perciò la corrente in esso circolante sarà sfasata in ritardo di 90° rispetto alla tensione applicata. Però, la corrente reattiva comporta un trasporto di corrente inutile, ossia essa concorre ad aumentare l'intensità di corrente che circola in linea, ma questo surplus di corrente reattiva, non serve per il funzionamento del motore, ma serve solo ad aumentare le perdite per effetto JOULE nella linea elettrica stessa. Si osserva che le perdite di una LINEA elettrica sono proporzionali al quadrato della corrente in essa circolante, proprio per questo in molte circostanze occorre diminuire la corrente reattiva, proprio per far diminuire l'intensità della corrente che complessivamente circola nella linea, ed a questo procedimento tecnico si dà il nome di RIFASAMENTO. Il procedimento di RIFASAMENTO dell'UTILIZZATORE o dell'IMPIANTO, si può eseguire secondo due modalità, ossia il RIFASAMENTO può essere TOTALE o PARZIALE.

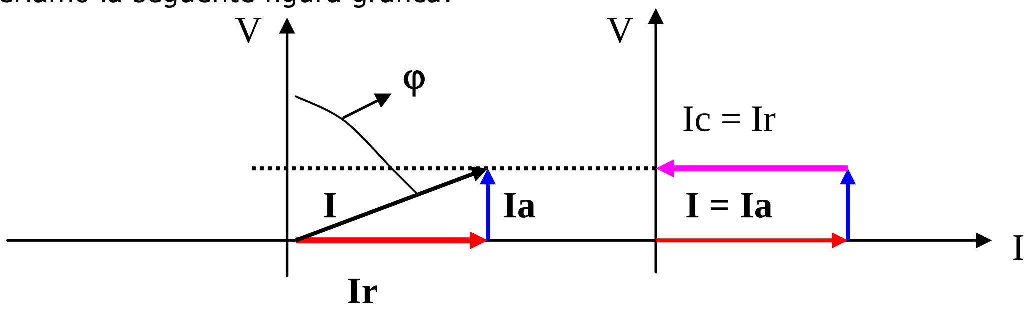
In che cosa consiste il RIFASAMENTO?

Consiste nel collegare in PARALLELO, a monte del carico un CONDENSATORE C di CAPACITA' opportuna; in figura è visibile uno schema di principio:



Il condensatore C assorbe dalla rete una corrente sfasata in ANTICIPO di 90° sulla tensione, la quale viene a compensare **totalmente** o **parzialmente**, la corrente sfasata in ritardo sulla tensione, dovuta al CARICO INDUTTIVO.

Consideriamo la seguente figura grafica:



Da questa figura si constata che la componente capacitiva della corrente, deve compensare la corrente induttiva Ir assorbita dal carico, in modo tale che **I = Ia**.

In questo caso si valuta il valore della capacità C per eseguire il **RIFASAMENTO TOTALE**. Noi sappiamo che: Ia = I cosφ , e da ciò si ricava,

Xc Ic = V Ic = V / Xc , ma Xc = 1 / ωC, e

Ic = ωC V, dove nel caso di rifasamento totale, deve risultare,

Ic = Ir = I senφ, e perciò deve risultare,

ωC V = I senφ, e questo implica che, **C = I senφ / ω V**. Ora se moltiplico sia il numeratore che il denominatore per V si ottiene che:

$$C = VI\,sen\varphi / \omega V^2 = Q / \omega V^2.$$

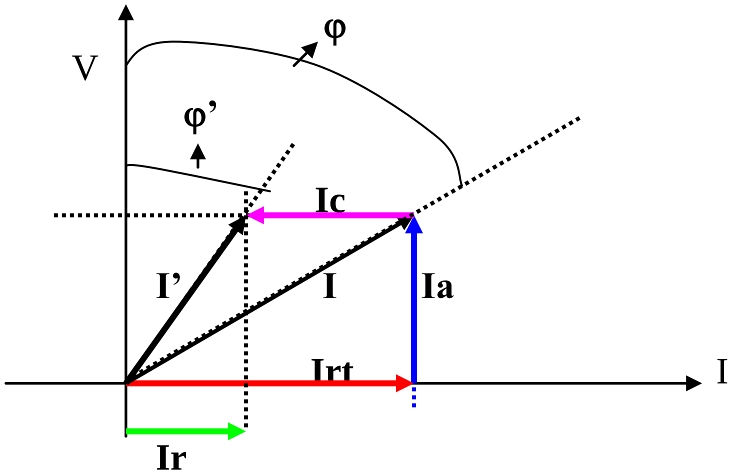
Visto che Q = V I senφ, e P = V I cosφ, posso eseguire il rapporto Q / P, ottenendo:

Q / P = senφ / cosφ = Tg φ e perciò scriveremo la relazione superiore nel modo seguente,

$$C = VI\,sen\varphi / \omega V^2 = Q / \omega V^2 = P\,Tg\,\varphi / \omega V^2$$

e con questo valore di capacità **C** si realizza il **RIFASAMENTO TOTALE**.

Esaminiamo il caso in cui il RIFASAMENTO sia PARZIALE.
Come nel caso precedente ci aiutiamo con il seguente schema grafico:



In questo caso si osserva che:

Irt = Ic + Ir e ⇨ **Ic = Irt – Ir**, dove

risulta che, Ic = ω C V.

Ma dalla figura, della pagina precedente, si osserva che è possibile esprimere:

Ir / Ia = Tg φ' e perciò, **Ir = Ia Tgφ'**, e

(perché Ir = I' senφ' e Ia = I' cosφ'), e sarà anche,

Irt / Ia = Tg φ e perciò è **Irt = Ia Tg φ** ,

(poiché, Irt = I senφ e Ia = I cosφ).

Sapendo che Ic è uguale a Irt – Ir, si può allora dedurre che:

Ic = ω C V = Ia Tgφ' - Ia Tg φ = Ia (Tgφ' - Tg φ),

però è ancora vero che Ia = I cos φ , e perciò posso scrivere,

ω C V = I cos φ (Tgφ' - Tg φ), ossia

$$C = I \cos \varphi \, (Tg\varphi' - Tg \, \varphi) / \omega V,$$

ora se moltiplico sia il numeratore che il denominatore per V, si ottiene infine che,

$$C = V I \cos \varphi \, (Tg\varphi' - Tg \, \varphi) / \omega V^2,$$

ma V I cos = P e perciò ne risulta che, **C = P (Tgφ' - Tg φ) / ω V^2.**

Questo è il valore della capacità per ottenere un rifasamento PARZIALE, ossia nel caso non si elimini completamente la componente di corrente reattiva, ma la si riduca soltanto, con lo scopo di diminuire opportunamente la corrente di LINEA.